PROBLÈME N° 1

Préambule

1. Soit h la fonction qui, à tout réel strictement positif x, associe : $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$.

Montrer que la fonction h est constante sur $]0,+\infty[$ (on précisera la valeur prise par h sur $]0,+\infty[$)

Grand classique du cours de PTSI ! Pour montrer qu'une fonction est constante, on montre que sa dérivée est nulle

Attention : il faut justifier la dérivabilité avant de dériver ! L'argument minimal acceptable est « h est dérivable par les théorèmes usuels vu que $x \neq 0$ sur $]0,+\infty[$ »

Une argument plus élaboré est : la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition $\left[x \mapsto \arctan \dfrac{1}{x}\right]$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, par somme h le sera aussi.

Ainsi, h est dérivable sur $]0,+\infty[\subset \mathbb{R}^*$ et on a :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} \quad \text{avec } u(x) = \frac{1}{x} \quad \text{soit} \quad h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

La fonction h est donc constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ aussi :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = h(1) = 2 \times \arctan 1 = 2 \times \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2} = h(x)}$$

Attention, le fait qu'on travaille sur un intervalle à de l'importance : on a aussi $h'(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ mais $h(x)$ n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$, elle l'est sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et sur $]0,+\infty[$ mais la constante n'est pas la même !

On a : $h(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$ (évaluation en -1, par exemple)

2. a. Pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, exprimer $\cos t$ en fonction de $\cos \frac{t}{2}$

Avec la trigonométrie usuelle : $\cos t = \cos\left(2 \times \dfrac{t}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{\cos t = 2\cos^2 \dfrac{t}{2} - 1}$

b. Pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, comparer $\dfrac{1}{1+\tan^2 \frac{t}{2}}$ et $\cos^2 \dfrac{t}{2}$

Si $t \in \left[0, +\dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $\dfrac{t}{2} \in \left[0, +\dfrac{\pi}{4}\right]$ donc $\dfrac{t}{2} \neq \dfrac{\pi}{2} [\pi]$ et $\tan \dfrac{t}{2}$ existe.

Il faut penser à s'assurer de l'existence des objets quand elle peut poser problème.

Ensuite : $$\frac{1}{1+\tan^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{1+\dfrac{\sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2}}} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{1} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{1}{1+\tan^2 \frac{t}{2}} = \cos^2 \frac{t}{2}}$$

c. Pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on pose $u = \tan \dfrac{t}{2}$. On demande d'exprimer $\cos t$ en fonction de u.

Avec les deux questions précédentes : $\cos^2 \dfrac{t}{2} = \dfrac{1}{1+u^2}$ et $\cos t = 2\cos^2 \dfrac{t}{2} - 1 = \dfrac{2}{1+u^2} - 1 \Leftrightarrow \boxed{\cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}}$

Partie

Pour tout réel x de $]-1,1[$, on pose : $\quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x\cos t}$

1. Que vaut F(0) ? $\boxed{\mathrm{F}(0) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$

2. Soit $a \in]0,1[$.

Étudier la dérivabilité de F sur $[-a,a]$ et exprimer, pour tout réel x de $[-a,a]$, $\mathrm{F}'(x)$ en fonction de x.

On remarque que $|x\cos t| \leqslant |x| \leqslant a < 1$ donc $1 - x\cos t \neq 0$ pour tout $x \in [-a,a]$ et pour $t \in \mathbb{R}$ donc, à fortiori, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

La contrainte sur a (à savoir $a < 1$) assure donc la définition de l'intégrale à paramètre : la convergence de l'intégrale est assurée car ce n'est pas une intégrale généralisée mais une intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Appliquons le le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètres à $f(x,t) = \dfrac{1}{1 - x\cos t}$ où $(x,t) \in [-a,a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Énoncé du théorème : Il s'agit de vérifier :

i) Pour $x \in [-a,a]$ fixé, $[t \mapsto f(x,t)]$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ii) Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ fixé, $[x \mapsto f(x,t)]$ est C^1 sur $[-a,a]$

iii) Pour $x \in [-a,a]$ fixé, $\left[t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right]$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

iv) Il existe φ continue, positive et intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ avec :

$$\forall (x,t) \in [-a,a] \times \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right], \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

et on pourra alors conclure que F est C^1 sur $[-a,a]$ avec : $\mathrm{F}'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$

Vérification des hypothèses :

La fonction de deux variables $[(x,t) \mapsto 1 - x\cos t]$ est C^1 sur $[-a,a] \times \mathbb{R}$ et, puisque $1 - x\cos t \neq 0$ (déjà vu), on obtient bien par quotient la classe C^1 de la fonction de deux variables f sur $[-a,a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle y admet donc des dérivées partielles qui sont continues sur ce domaine. En passant aux applications partielles, on a donc ii) et iii) qui sont vérifiées.

Et, on a aussi $[t \mapsto f(x,t)]$ continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ce qui assure que i) est vérifiée (Ce n'est pas une intégrale généralisée mais une intégrale sur un segment !)

Il reste à obtenir la domination : $\forall (x,t) \in [-a,a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{(-\cos t)}{(1 - x\cos t)^2} = \dfrac{\cos t}{(1 - x\cos t)^2}$

On majore $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|$ indépendamment de x pour $(x,t) \in [-a,a] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en partant de la contrainte sur x :

$-a \leqslant -x \leqslant a \Leftrightarrow_{\cos t \geqslant 0} -a\cos t \leqslant -x\cos t \leqslant a\cos t$ or $\begin{cases} -a\cos t \geqslant -a \\ a\cos t \leqslant a \end{cases}$ donc : $\quad -a \leqslant 1 - x\cos t \leqslant a$

aussi : $\quad 0 < 1 - a \leqslant 1 - x\cos t \leqslant 1 + a \Rightarrow (1-a)^2 \leqslant (1 - x\cos t)^2 \leqslant (1+a)^2$ car la fonction carrée est croissante sur $[0, +\infty[$

Puis, en passant à l'inverse : $\dfrac{1}{(1 - x\cos t)^2} \leqslant \dfrac{1}{(1-a)^2} \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{\cos t}{(1 - x\cos t)^2} \leqslant \dfrac{\cos t}{(1-a)^2} \leqslant \dfrac{1}{(1-a)^2} = \varphi(t)$ vu que $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$

La fonction constante φ est positive, continue et intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc iv) est vérifiée

On peut aussi dominer par la fonction ψ avec $\psi(t) = \dfrac{1}{(1-a)^2}\cos t$ qui est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable sur cet intervalle. Dans tous les cas, on comprend l'intérêt de travailler sur un segment $[-a,a]$ où $a \in]0,1[$ pour garantir la domination

Finalement, le théorème s'applique et on a : $\boxed{\forall x \in [-a,a],\ \mathrm{F}'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1 - x\cos t)^2}\mathrm{d}t}$

3. Étudier la dérivabilité de F sur $]-1,1[$.

On sait que la dérivabilité est une propriété locale et que $]-1,1[= \displaystyle\bigcup_{a \in]0,1[} [-a,a]$ (car $a < 1$) donc, puisque F est dérivable sur chacun des segments $[-a,a]$, $\boxed{\text{F est aussi dérivable sur }]-1,1[}$

4. A l'aide du changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ montrer que, pour tout réel x de $]-1,1[$:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

(On pensera à utiliser le préambule)

On pose $u = \tan\frac{t}{2} = \varphi(t)$ dans $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-x\cos t}\,dt$ qu'on sait convergente (d'après 2. et 3.)

alors : $t\Big|_0^{\pi/2}$ $u\Big|_0^{1}$ $du = \varphi'(t)dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{t}{2}\right)dt \Leftrightarrow dt = \frac{2du}{1+u^2}$

Le changement de variables est possible car : φ est de classe C^1 sur $J = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, strictement croissante donc bijective de J vers $[0,1]$.

Avec le préambule :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{1-x\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2-x(1-u^2)}du = \int_0^1 \frac{2}{1-x+(1+x)u^2}du \quad \text{or} \begin{cases} 1-x>0 \\ 1+x>0 \end{cases}$$

d'où $F(x) = \frac{2}{1-x}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}u\right)^2}du = \frac{2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}u\right)^2}du = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^1 \frac{h'(u)}{1+(h(u))^2}du$

avec $h(u) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}u$ soit : $F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}[\arctan h(u)]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan h(1) - 0 = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

5. En déduire, pour tout réel x de $]-1,1[$, une relation entre $F(x)$ et $F(-x)$

$$F(-x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\frac{1}{\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right)$$ avec le préambule

Ainsi : $\boxed{F(-x) = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} - F(x)}$

Pour ce qui suit, on utilisera et on admettra le fait que, pour tout x de $]-1,1[$: $(1-x^2)F'(x) = xF(x)+1$

6. a. Donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle homogène : $(\mathscr{E}_0)$ $(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 résolue en $y'(x)$ car $1-x^2 \neq 0$ sur $]-1,1[$:

$(\mathscr{E}_0) \Leftrightarrow y'(x) - \frac{x}{1-x^2}y(x) = 0$ Si $a(x) = -\frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\times\frac{-2x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ alors $A(x) = \frac{1}{2}\ln|u(x)| = \ln\sqrt{1-x^2}$

On sait alors que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions homogène est Vect}(h) \text{ où } h(x) = e^{-A(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

N'hésitez pas à replacer l'équation dans le cadre du cours et de préciser la structure des solutions associée.

b. À l'aide de la méthode de variation de la constante, donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}) : \quad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1$$

On sait que l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$ est $y_p + \text{Vect}(h)$ où $\begin{cases} y_p \text{ est une solution particulière de } (\mathscr{E}) \\ h \text{ est une solution homogène non nulle} \end{cases}$.

On cherche une solution y_p par variation de la constante sous la forme

$y_p(x) = C(x)h(x)$ où C est dérivable sur $]-1,1[$ et $h(x)$ est l'expression de la solution homogène de II-6-a

$$(1-x^2)y_p'(x) - xy_p(x) = 1 \Leftrightarrow (1-x^2)C'(x)h(x) + \underbrace{(1-x^2)C(x)h'(x) - xC(x)h(x)}_{=C(x)\times 0=0} = 1 \Leftrightarrow C'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Attention, si vous utilisez la forme réduite de l'équation $y' - a(x)y = \frac{1}{1-x^2}$ n'oubliez pas de diviser aussi le 2nd membre !

Il suffit donc de prendre $C(x) = \text{Arcsin}\,x$ puisqu'on reconnaît immédiatement cette primitive usuelle

La solution générale de $(\mathscr{E})$ a donc pour expression $\boxed{y(x) = \frac{\text{Arcsin}\,x + C}{\sqrt{1-x^2}} \text{ où C est une constante réelle}}$

On répond bien à la question posée : la solution générale n'est pas une solution particulière !

c. Donner les solutions respectives des problèmes de Cauchy :

$$(\mathscr{P}_0) : \begin{cases} (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathscr{P}_1) : \begin{cases} (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La condition initiale imposée dans les problèmes de Cauchy fixe la constante d'intégration.

$y(0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\text{Arcsin}\,0 + \text{C}}{\sqrt{1-0^2}} = 0 \Leftrightarrow \text{C} = 0$ d'où $\boxed{y(x) = \dfrac{\text{Arcsin}\,x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est l'expression de la solution de } (\mathscr{P}_0)}$

$y(0) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\text{Arcsin}\,0 + \text{C}}{\sqrt{1-0^2}} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \text{C} = \dfrac{\pi}{2}$ d'où $\boxed{y(x) = \dfrac{\text{Arcsin}\,x + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est l'expression de la solution de } (\mathscr{P}_1)}$

d. Pour tout x de $]-1,1[$, déduire de la résolution de $(\mathscr{P}_1)$ une expression simplifiée de $\text{F}(x)$ avec la fonction arcsinus.

On a admit que F est une solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-1,1[$ et, avec la question II-1, on sait que F est en fait une solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P}_1)$ qui est unique aussi on peut conclure que : $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \text{F}(x) = \dfrac{\text{Arcsin}\,x + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{1-x^2}}}$

7. Dans cette question, on recherche les solutions développables en série entière sur un domaine $]-\text{R},\text{R}[\subset \mathbb{R}$, $\text{R} > 0$ de l'équation différentielle :

$$(\mathscr{E}_\text{R}) : \quad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1, \quad \forall x \in]-\text{R},\text{R}[$$

sous la forme : $\quad y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in]-\text{R},\text{R}[\quad$ où, pour tout entier naturel n, a_n est un réel.

On pose : $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$

a. Que vaut a_1 ?

Avec le cours sur les séries entières, on sait que $\quad y$ est C^∞ sur $]-\text{R},\text{R}[\quad$ et $\quad a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout n

Aussi : $\quad a_1 = y'(0) \quad$ or, si on évalue pour $x = 0 \in]-\text{R},\text{R}[$ dans $(\mathscr{E}_\text{R})$, on a : $\quad 1 \times y'(0) - 0 = 1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 1}$

Plus généralement, si une fonction y est développable en série entière, alors son DSE $y(x) = \sum a_n x^n$ est celui de sa série de Taylor et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$

D'une manière générale, l'évaluation en $x = 0$ dans l'équation permet bien souvent d'obtenir de l'information sur les premiers termes a_0, a_1 ou a_2 éventuellement à travers une relation les reliant.

b. Donner, pour tout entier naturel non nul n, une relation de récurrence reliant a_{n+1} et a_{n-1}.

Par dérivation termes à termes, on a : $\quad \forall x \in]-\text{R},\text{R}[, \quad y'(x) = \displaystyle\sum_{n=\cancel{0}1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

$$(\mathscr{E}_\text{R}) \Leftrightarrow (1-x^2)\sum_{n=\cancel{0}1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=\cancel{0}1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=\cancel{0}1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

On pose $\quad k = n-1$ dans la première somme et $k = n+1$ dans les deux autres :

$(\mathscr{E}_\text{R}) \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=\cancel{1}2}^{+\infty}(k-1)a_{k-1}x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1}x^k = 1 \qquad$ On isole le terme $k = 0$ de la 1er somme et on réunit les autres sommes par linéarité (possible car toutes les sommes convergent) :

$(\mathscr{E}_\text{R}) \Leftrightarrow a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\underbrace{\left((k+1)a_{k+1} - (k-1)a_{k-1} - a_{k-1}\right)}_{=(k+1)a_{k+1} - k a_{k-1}} x^k = 1 \qquad$ Par unicité du développement en série entière,

on peut conclure : $\quad (\mathscr{E}_\text{R}) \Leftrightarrow \quad a_1 = 1 \quad$ et $\quad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} = 0}$

La relation, qui n'est pas donnée, est absolument nécessaire pour mener les questions suivantes. On peut donc en conclure que le jury estime que ce type de raisonnement est un pré-requis indispensable que tout étudiant doit savoir faire...

c. Exprimer, pour tout entier naturel p, a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p et λ

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_{n-1}$ et on itère cette relation en commençant avec $n = 2p+1 \in \mathbb{N}^*$ si $p \in \mathbb{N}$:

$$a_{2p} = a_{(2p-1)+1} = \frac{2p-1}{2p} a_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} a_{2p-4)} = \cdots = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2(p-1)} \times \cdots \times \frac{1}{2\times 1} a_0$$

(on ajoute les facteurs pairs manquant au numérateur pour obtenir une factorielle)

$$= \frac{(2p)(2p-1)}{(2p)^2} \times \frac{(2p-2)(2p-3)}{(2(p-1))^2} \times \cdots \times \frac{2\times 1}{(2\times 1)^2} a_0$$

(on factorise les p puissances de 2 au dénominateur pour obtenir le facteur 2^p et une factorielle)

$$= \boxed{\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \lambda = a_{2p}}$$

De la même manière, en commençant par $n = 2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$

$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} a_{2(p-1)+1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2(p-1)}{2(p-1)+1} a_{2(p-2)+1}$$

$$= \cdots = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2(p-1)}{2(p-1)+1} \times \cdots \times \frac{2\times 1}{2\times 1+1} a_{2\times 0+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} a_1$$

Puisque $a_1 = 1$: $\boxed{a_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}}$

8. On suppose désormais que : $\quad \lambda = 0$

a. Énoncer le critère de d'Alembert pour les séries numériques

Soit $\sum u_n$ est une série numérique avec $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang ;

$$\text{si} \quad \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,+\infty[\cup +\infty \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \text{la série converge absolument (CVA) si } \ell < 1 \\ \text{la série diverge grossièrement (DVG) si } \ell > 1 \end{cases}$$

On rappelle qu'on ne peut rien conclure sans étude plus fine lorsque $\ell = 1$ (cas critique)

Attention à ne pas omettre les valeurs absolues sur le quotient !

b. Déterminer la valeur du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

Avec l'hypothèse $\lambda = 0$ alors $a_0 = 0$ et la relation de II-7-b : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_{n-1}$ entraîne, par une récurrence immédiate, que : $\ \forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0$ qu'on peut aussi obtenir avec II-7-c directement...

La série est lacunaire et le quotient dans d'Alembert est celui de 2 termes réellement présents consécutifs :

Ainsi : $\ \sum a_n x^n = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_{2p+1} x^{2p+1}$ autrement dit le quotient de 2 termes consécutifs est :

Pour $x \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$: $\quad \dfrac{|a_{2p+1} x^{2p+1}|}{|a_{2p-1} x^{2p-1}|} = \left|\dfrac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}}\right| |x^2| =_{\text{avec II-8-b où n=2p}} \dfrac{2p}{2p+1} x^2 \sim_{p\to+\infty} x^2$

(revenir aux expressions de II-7-c compliquent, à mon avis, les choses...

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1, \text{ la série CVA donc le rayon de convergence R vérifie R} \geqslant 1 \\ \text{Si } x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1, \text{ la série DVG donc le rayon de convergence R vérifie R} \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{R} = 1}$$

c. A l'aide de la question 6.c, donner le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto (\arcsin x)^2$. On précisera le rayon de convergence et le(s) théorème(s) utilisé(s).

On note $\quad f(x) = (\arcsin x)^2$ alors f est dérivable (même C^∞) sur $]-1,1[$ avec :

$$f'(x) = 2\arcsin x \times \arcsin'(x) = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi, on reconnaît en $y = \dfrac{1}{2} f'$ l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathscr{P}_0)$ de la question II-6-c

On a vu aux questions II-8 et II-9 que ce problème de Cauchy admet une unique solution développable en série entière $y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}$ de rayon de convergence R = 1.

Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, on peut donc affirmer que :

$$y(x) = \frac{1}{2} f'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1} \Leftrightarrow f'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2a_{2p+1} x^{2p+1} \quad \text{pour } |x| < 1 \text{ (rayon de convergence R = 1)}$$

Il reste, ensuite, à utiliser le théorème d'intégration terme à terme qui conserve le rayon de convergence :

$$f(x) = f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = \sum_{p=0}^{+\infty} 2a_{2p+1} \frac{x^{2p+2}}{2p+2} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} \frac{x^{2p+2}}{p+1} \quad \text{pour } |x| < 1 \text{ (rayon de convergence R = 1)}$$

$\boxed{\text{PROBLÈME N}^{\text{o}}\ 2}$

Première Partie.

On considère les matrices carrées $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

Les deux matrices sont symétriques réelles donc, par le théorème spectral, elles sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$

2. Calculer A^2. $\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = B}$

3. Déterminer une matrice P telle que P^TAP et P^TBP soient des matrices diagonales qu'on précisera.

• On précise les éléments propres de la matrice A :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ -1 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & x+2 & -2 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x+2)(x-2)$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, -2\}}$.

Les valeurs propres étant simple, les sev propres $E_1(A) = \mathrm{Ker}\,(A - I_3)$, $E_2(A) = \mathrm{Ker}\,(A - 2I_3)$ et $E_{-2}(A) = \mathrm{Ker}\,(A + 2I_3)$ sont de dimension un et on sait, de plus, qu'ils sont deux à deux orthogonaux puisque la matrice A est symétrique réelle.

Ainsi, on détermine $\vec{u} \in E_1(A)$ et $\vec{v} \in E_2(A)$ non nuls et alors : $\quad E_1(A) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$, $\quad E_2(A) = \mathrm{Vect}(\vec{v})$ (car sev de dimension 1)

puis : $\quad E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}(\vec{w}) \quad$ où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ (car sev de dimension 1 orthogonal à $E_1(A)$ et à $E_2(A)$)

On pourra d'ailleurs vérifier que $\vec{u}.\vec{v} = 0$ puisque les droites $E_1(A)$ et $E_2(A)$ sont orthogonales.

$E_1(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(\vec{u})$ où $\vec{u} = (1, 1, 1)$ (la somme des colonnes est nul)

$E_2(A) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}(\vec{v})$ où $\vec{v} = (1, 0, -1)$ (car $C_1 - C_3 = 0$ où C_j colonne j de $A - 2I_3$)

$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dirige $E_{-2}(A)$

La famille $\mathscr{B}' = \left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{v}\|}, \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\right)$ est ainsi une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ qui diagonalise A. La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ orthonormée à la base $\mathscr{B}'$ également orthonormée est une matrice orthogonale P (autrement dit $P^T = P^{-1}$) qui vaut $\boxed{P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}}$

La formule de changement de base s'écrit $\boxed{P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$

• Mais $B = A^2$ aussi : $P^TBP = P^TA^2P = P^TA \times PP^TAP = D^2$ puisque $P^TP = I_3$ aussi : $\boxed{P^TBP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$

Deuxième Partie

Dans cette partie, $\vec{a}$ désigne le vecteur $3\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\sqrt{6}\vec{k}$ où $\mathscr{B}=(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$

On considère les vecteurs $\vec{e}_1=\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, $\vec{e}_2=\dfrac{1}{4}(\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-\sqrt{6}\vec{k})$ et $\vec{e}_3=\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2$.

On note Q la matrice de passage de $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ à $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

1. Sans calculer la matrice Q, donner la nature de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à Q.
On ne demande pas de donner ses éléments caractéristiques dans cette question.

On a : $\vec{e}_1.\vec{e}_2=\dfrac{1}{4\|\vec{u}\|}(3\times1+1\times3-(\sqrt{6})^2)=0$ $\quad\|\vec{e}_1\|=1$, $\|\vec{e}_2\|=\dfrac{1}{4}\times\sqrt{1+9+6}=\dfrac{\sqrt{16}}{4}=1$

Aussi, la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est orthonormée directe puisque $\vec{e}_3=\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2$.

Ainsi, Q est une matrice de passage d'une base orthonormée directe à une autre base orthonormée directe donc $\boxed{\text{Q}\in SO_3(\mathbb{R})\text{ est une matrice d'une rotation de }\mathbb{R}^3}$ et donc $\boxed{f\text{ est une rotation de }\mathbb{R}^3}$

2. Déterminer la matrice Q.

Par définition d'une matrice de passage, on reporte en colonne les coordonnées de $\vec{e}_j$ dans la colonne j :

$$\vec{e}_1=\frac{1}{\sqrt{9+1+6}}(3\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\sqrt{6}\vec{k})=\frac{1}{4}(3\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\sqrt{6}\vec{k}),\quad \vec{e}_2=\frac{1}{4}(\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-\sqrt{6}\vec{k})\quad\text{et}\quad \vec{e}_3=\frac{1}{4^2}\begin{pmatrix}3\\1\\\sqrt{6}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\3\\-\sqrt{6}\end{pmatrix}=\frac{1}{4^2}\begin{pmatrix}-4\sqrt{6}\\4\sqrt{6}\\8\end{pmatrix}$$

$$\text{Q}=\text{Mat}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&-\sqrt{6}\\1&3&\sqrt{6}\\\sqrt{6}&-\sqrt{6}&2\end{pmatrix}$$

3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f.

D'après II-1, on sait déjà que f est une rotation vectorielle (Il n'est donc pas nécessaire de vérifier que les colonnes forment une base orthonormée directe!)

L'axe de la rotation est le sous-espace vectoriel de dimension 1 : $\text{D}=\text{Ker}\,(\text{Q}-\text{I}_3)=\text{Ker}\,\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&1&-\sqrt{6}\\1&-1&\sqrt{6}\\\sqrt{6}&-\sqrt{6}&-2\end{pmatrix}$

On repère que $C_1+C_2=0$ dans $\text{Q}-\text{I}_3$ donc $(1,1,0)\in\text{D}$ et ainsi $\boxed{\text{l'axe est D}=\text{Vect}\left(\vec{u}\right)\text{ où }\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)}$

Dans une base adaptée à cette rotation, la matrice sera de la forme $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ semblable à la matrice Q

Par invariance de la trace par similitude, on sait que :

$$\text{tr(Q)}=1+2\cos\theta\Leftrightarrow-\frac{3+3+2}{4}=1+2\cos\theta\Leftrightarrow2\cos\theta=1\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\theta\equiv\pm\frac{\pi}{3}$$

On choisit $\vec{v}=(0,0,1)$ unitaire et orthogonal à $\vec{u}$ alors $\vec{v}\in\text{D}^\perp$ et $(\vec{v},\vec{w})$ où $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est une base de $\text{D}^\perp$ aussi $f(\vec{v})=\cos\theta\vec{v}+\sin\theta\vec{w}$ de sorte que $\vec{v}\wedge f(\vec{v})=\vec{0}+(\sin\theta)\vec{v}\wedge\vec{w}=(\sin\theta)\vec{u}$

La troisième colonne de Q nous donne :

$f(\vec{v})=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\\sqrt{6}\\2\end{pmatrix}$ aussi : $\vec{v}\wedge f(\vec{v})=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\\sqrt{6}\\2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\?\\??\end{pmatrix}=(\sin\theta)\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ aussi $-\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sin\theta<0$. Ainsi :

$\boxed{\theta=-\dfrac{\pi}{3}}$

Troisième Partie

L'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $\big(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\big)$ usuels.
Soient a et b deux réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$.
On considère une conique $C_{a,b}$ d'équation : $\quad ax^2+2bxy+ay^2-4(x+y)=4$

1. Dans cette question uniquement $a=5$ et $b=-3$.

a. Etudier la conique $C_{5,-3}$
On donnera en particulier :

- une équation réduite en précisant le repère dans lequel elle est obtenue,
- sa nature,
- les coordonnées dans le repère $\big(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\big)$ de son centre,
- les coordonnées dans le repère de votre choix (à préciser) de ses sommets.

$C_{5,-3}$: $5x^2-6xy+5y^2-4(x+y)=4$ est associée à la matrice $A=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&5\end{pmatrix}$

$\det(A)=25-9=16>0$ donc a conique est du genre ellipse (éventuellement dégénérée en l'ensemble vide ou un point)
Les valeurs propres réelles λ et μ de la matrice symétrique A sont les racines de
$\chi_A(x)=x^2-\mathrm{tr}(A)x+\det(A)=x^2-10x+16$ de discriminant $\Delta=100-4\times16=36=6^2$ aussi $\lambda=\dfrac{10-6}{2}=2$ et $\mu=\dfrac{10+6}{2}=8$
et les deux espaces propres $E_2=\mathrm{Ker}\,(A-2I_2)$ et $E_8=\mathrm{Ker}\,(A-8I_2)$ sont des droites perpendiculaires.

$E_2=\mathrm{Ker}\begin{pmatrix}3&-3\\-3&3\end{pmatrix}=\mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$ autrement dit $E_2=\mathrm{Vect}(\vec{u})$ où $\boxed{\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})}$

$E_8=E_2^{\perp}=\mathrm{Vect}((-1,1)=\mathrm{Vect}(\vec{v})$ où $\boxed{\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{\imath}+\vec{\jmath})}$

Notons $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées dans $\big(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\big)$ et $X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ celles dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ alors :

Si $P=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ à la base orthonormée $(\vec{u},\vec{v})$, on a :

$X=PX'\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ où $P\in O_2(\mathbb{R})\Leftrightarrow P^T=P^{-1}$ et, par réduction orthogonale de A : $\;P^TAP=\begin{pmatrix}2&0\\0&8\end{pmatrix}=D$

Dés lors, la partie quadratique devient : $\quad 5x^2-6xy+5y^2=X^TAX=X'^TP^TAPX'=X'^TDX'=2(x')^2+8(y')^2$

et la partie linéaire devient : $\quad -4(x+y)=-4\left(\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}+\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{8}{\sqrt{2}}x'$

Aussi, dans $(O,\vec{u},\vec{v})$: $C_{5,-3}$ a pour équation $\quad 2(x')^2+8(y')^2-\dfrac{8}{\sqrt{2}}x'=4\Leftrightarrow 2\Big(\underbrace{(x')^2-2\times\sqrt{2}x'}_{=(x'-\sqrt{2})^2-2}\Big)+8(y')^2=4$

$$\Leftrightarrow 2(x'-\sqrt{2})^2+8(y')^2=4+4=8$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x'-\sqrt{2})^2}{2^2}+\frac{(y')^2}{1^2}=1$$

$\boxed{\text{Dans le repère } (O,\vec{u},\vec{v}),\ C_{5,-3} \text{ a pour équation réduite } \dfrac{(x'-\sqrt{2})^2}{2^2}+\dfrac{(y')^2}{1^2}=1}$.

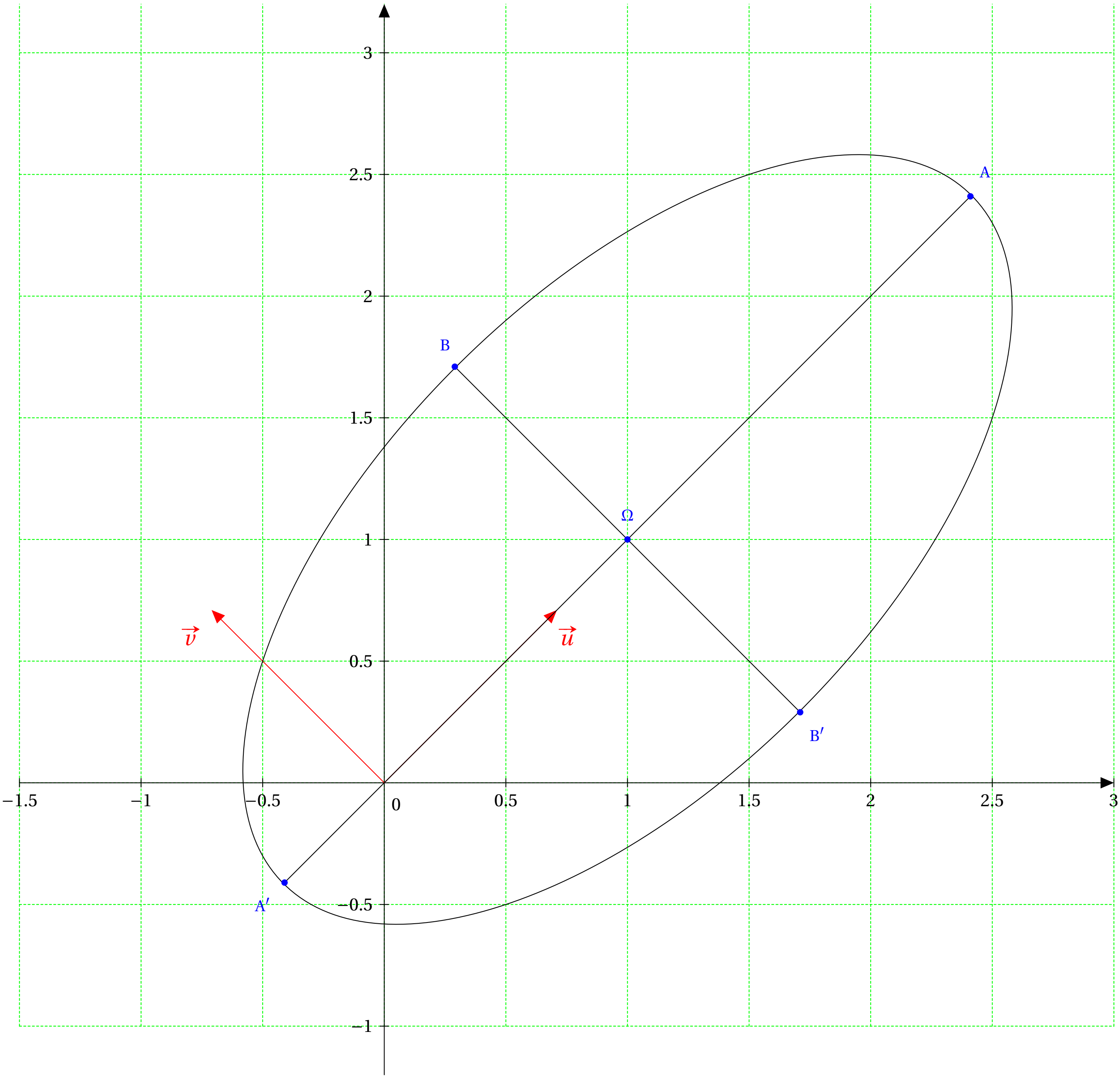
$\boxed{\text{On identifie une ellipse}}$ de centre Ω de coordonnées $(x'_0,y'_0)=(\sqrt{2},0)$ dans $(O,\vec{u},\vec{v})$ soit $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x'_0\\y'_0\end{pmatrix}$ càd

$\boxed{\text{de centre } \Omega \text{ de coordonnée } (x_0,y_0)=(1,1) \text{ dans } \big(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\big)}$

Les axes de symétries sont $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\Omega+\mathrm{Vect}(\vec{v})$ et les demi-axes sont $a=2$ et $b=1$ de sorte que,

$\boxed{\text{dans le repère } (\Omega,\vec{u},\vec{v}), \text{ les sommets ont pour coordonnées } (-2,0),\ (0,2),\ (0,-1) \text{ et } (0,1)}$

b. Tracer la conique $\mathcal{C}_{5,-3}$ dans le repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On utilisera la feuille de papier millimétré fournie et on prendra une unité de 4 cm.



2. Déterminer en fonction de a et b le type de conique qu'est $\mathcal{C}_{a,b}$.

Le genre de la conique est déterminé par le déterminant de la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ associée à la conique.

- Si $\det(A) = a^2 - b^2 > 0$ alors la conique est du genre ellipse (éventuellement dégénéré en l'ensemble vide ou un point)
- Si $\det(A) = a^2 - b^2 = 0$ alors la conique est du genre parabole (éventuellement dégénéré en l'ensemble vide, une droite ou deux droites parallèles)
- Si $\det(A) = a^2 - b^2 < 0$ alors la conique est du genre hyperbole (éventuellement dégénéré en deux droites sécantes)

Quatrième Partie

Marie et Louis sont deux bons joueurs d'échecs qui, lorsqu'ils jouent l'un contre l'autre, font invariablement une partie nulle. Pour se départager, ils décident de jouer contre un ordinateur. Un des joueurs commence.
S'il gagne la partie, alors il est déclaré gagnant. Si la partie est perdue, l'ordinateur est déclaré vainqueur.
Dans ces deux cas, le tournoi s'arrête. Dans le cas d'une partie nulle, c'est au tour de l'autre joueur de jouer contre l'ordinateur selon le même protocole. Le jeu continue jusqu'à ce qu'un joueur ou l'ordinateur soit déclaré gagnant.
Lors d'une partie d'un joueur contre l'ordinateur, la probabilité d'une partie nulle est égale à $\frac{1}{2}$ et celle que le joueur gagne est égale à $\frac{1}{4}$ (et donc celle que l'ordinateur gagne est aussi égale à $\frac{1}{4}$). On introduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les événements

- E_n : « la n-ième partie est jouée et c'est une partie nulle. »
- F_n : « les n premières parties ont étés jouées et ont toutes été des parties nulles »

1. a. Déterminer et justifier les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}(\mathrm{E}_2|\mathrm{E}_1)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{E}_2|\overline{\mathrm{E}_1})$ puis la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{E}_2)$.
Les événements E_1 et E_2 sont-ils indépendants?

Sachant E_1 réalisé, la première partie a donné un résultat nulle donc la deuxième partie est bien jouée et on sait, d'après le texte, qu'elle a une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'être nulle donc $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{E}_2|\mathrm{E}_1) = \frac{1}{2}}$

Sachant $\overline{\mathrm{E}_1}$ réalisé, la première partie a donné un vainqueur et donc la deuxième partie n'est pas jouée. L'événement E_2 ne peut donc pas être réalisé : c'est un événement impossible et donc $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{E}_2|\overline{\mathrm{E}_1}) = 0}$

On applique la formule des probabilités totales pour calculer $\mathrm{P}(\mathrm{E}_2)$ avec le système complet $\{\mathrm{E}_1, \overline{\mathrm{E}_1}\}$ où $\mathrm{P}(\mathrm{E}_1) = \frac{1}{2}$ (la 1er partie est forcément jouée) : $\mathrm{P}(\mathrm{E}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}_1} \cap \mathrm{E}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{E}_1)\mathrm{P}(\mathrm{E}_2|\mathrm{E}_1) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}_1})\mathrm{P}(\mathrm{E}_2|\overline{\mathrm{E}_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{P}(\mathrm{E}_2) = \frac{1}{4}}$

OU BIEN : $\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_2 \cap \Omega = \mathrm{E}_2 \cap (\mathrm{E}_1 \cup \overline{\mathrm{E}_1}) = (\mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_1) \cup \underbrace{(\mathrm{E}_2 \cap \overline{\mathrm{E}_1})}_{=\emptyset} = \mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ car, si $\overline{\mathrm{E}_1}$ est réalisé, le jeu s'arrête et E_2 ne se réalise pas

et, par la formule des probabilités composées : $\mathrm{P}(\mathrm{E}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{E}_1)\mathrm{P}(\mathrm{E}_2|\mathrm{E}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Comme $\mathrm{P}(\mathrm{E}_2|\mathrm{E}_1) \neq \mathrm{P}(\mathrm{E}_2)$ (ou bien $\mathrm{P}(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) \neq \mathrm{P}(\mathrm{E}_1) \times \mathrm{P}(\mathrm{E}_2)$), $\boxed{\text{les événements } \mathrm{E}_1 \text{ et } \mathrm{E}_2 \text{ ne sont pas indépendants}}$

b. Pour $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, déterminer et justifier la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(\mathrm{E}_n|\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{E}_{n-1})$.

Sachant $\mathrm{E}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{E}_{n-1}$ réalisé, les $n-1$ premières parties se sont toutes terminées sur un match nulle ce qui assure que la n eme partie sera jouée et il y a alors une probabilité de $\frac{1}{2}$ qu'elle se termine en match nul : $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{E}_n|\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{E}_{n-1}) = \frac{1}{2}}$.

c. Exprimer F_n à l'aide des événements $(\mathrm{E}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{F}_n) = \frac{1}{2^n}$

On a : $\mathrm{F}_n = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k$ puisque, pour réaliser F_n, tous les événements $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$ doivent être réalisés en même temps.
On calcule alors F_n à l'aide de la formule des probabilités composées :
$\mathrm{P}(\mathrm{F}_n) = \mathrm{P}(\mathrm{E}_1)\mathrm{P}(\mathrm{E}_2|\mathrm{E}_1)\mathrm{P}(\mathrm{E}_3|\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2) \times \mathrm{P}(\mathrm{E}_n|\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \cdots \cap \mathrm{E}_{n-1}) = \underbrace{\frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2^n}$ en utilisant le 1.b d'où $\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{F}_n) = \frac{1}{2^n}}$

d. Comparer les événements F_n et F_{n+1}. En déduire la valeur de $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{F}_n\right)$.

Par leurs définitions, il est clair que $\boxed{\mathrm{F}_{n+1} \subset \mathrm{F}_n}$ (si F_{n+1} est réalisé alors F_n l'est aussi obligatoirement)

Mais alors, en utilisant la continuité décroissante, on a $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{F}_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(\mathrm{F}_n) = 0$ puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ d'où $\boxed{\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{F}_n\right) = 0}$

e. Conclure qu'il est presque sûr qu'il y ait un vainqueur à ce tournoi.

$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{F}_n\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{P}\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{F}_n}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{F}_n\right) = 1$ or $\mathrm{P}\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{F}_n}\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathrm{F}_n}\right)$ donc l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{\mathrm{F}_n}$ est presque sûr autrement dit cela signifie que l'un des événements $\overline{\mathrm{F}_n}$ se réalisera presque sûrement ce qui entraîne que l'une des n première partie a désigné un vainqueur. Il est donc presque sûr d'avoir un vainqueur à ce tournoi.

2. Louis propose à Marie de commencer mais elle refuse en disant que, dans ce cas, les chances de gagner de Louis seront plus faibles que les siennes. Pour vérifier cette affirmation, on suppose, dans cette question, que Marie commence à jouer.

On introduit les événements L : « Louis gagne le tournoi » et M : « Marie gagne le tournoi »

a. Expliquer les égalités $P(M) = P(L|E_1)$ et $L = L \cap E_1$

Lorsque E_1 est réalisé et puisque Marie a commencé, cela signifie que la seconde partie va pouvoir être jouée et, cette fois, par Louis. Louis est alors dans la même situation que Marie avant qu'elle ne joue la première partie et, vu que les conditions de jeux sont analogues, ils ont alors la même probabilité de gagner autrement dit $\boxed{P(M) = P(L|E_1)}$

Pour que L soit réalisé, il faut nécessairement que E_1 le soit (sinon il n'y a pas de deuxième partie puisque la première partie a désigné un vainqueur) autrement dit $L \subset E_1$ et donc : $\boxed{L \cap E_1 = L}$

b. En déduire que Marie a, en effet, deux fois plus de chance de gagner que Louis.

Dés lors : $P(L) = P(L \cap E_1) = P(E_1)P(L|E_1) = \dfrac{1}{2} \times P(M) \Rightarrow \boxed{P(M) = 2P(L)}$

Si Marie commence à jouer, elle a bien deux fois plus de chance de gagner que Louis.

3. Dans cette question, on suppose toujours que Marie a joué la première partie.

On introduit l'événement, pour $n \in \mathbb{N}^*$: M_n : « Marie joue la n-ième partie et elle gagne »

a. Justifier que $P(M_{2n}) = 0$

Si Marie commence à jouer la première partie, elle ne peut jouer que des parties d'indice impair car les joueurs alternent tant que le tournoi se poursuit aussi $M_{2n} = \emptyset$ est un événement impossible donc $\boxed{P(M_{2n}) = 0}$

b. Expliquer l'égalité $M_{2n+1} = F_{2n} \cap M_{2n+1}$ et en déduire que $P(M_{2n+1}) = \dfrac{1}{4^{n+1}}$

Pour réalisé l'événement M_{2n+1}, il est nécessaire que toutes les parties précédentes aient fini en match nul ce qui signifie que F_{2n} a été réalisé. Ainsi $M_{2n+1} \subset F_{2n}$ et, par suite : $\boxed{M_{2n+1} = F_{2n} \cap M_{2n+1}}$

Mais alors, par la formule des probabilités composées : $P\big(M_{2n+1}\big) = P\big(F_{2n} \cap M_{2n+1}\big) = P(F_{2n})P\big(M_{2n+1}|F_{2n}\big)$

On sait, d'après 1.c, que $P(F_{2n}) = \dfrac{1}{2^{2n}}$ De plus, si F_{2n} est réalisé, la partie $2n+1$ sera bien jouée et Marie a alors une probabilité de $\dfrac{1}{4}$ de gagner soit $P\big(M_{2n+1}|F_{2n}\big) = \dfrac{1}{4}$. Ainsi : $P\big(M_{2n+1}\big) = \dfrac{1}{2^{2n}} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4^n} \times \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{P\big(M_{2n+1}\big) = \dfrac{1}{4^{n+1}}}$

c. Exprimer M à l'aide des événements $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et calculer alors $P(M)$

M sera réalisée lorsque l'un des événements M_n le sera soit $\boxed{M = \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n}$

Les événements $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles car $M_p \cap M_q = \emptyset$ pour $p \neq q$. En effet, si par exemple, $p < q$ alors Marie ayant gagné au bout de p parties, les parties suivantes ne sont pas réalisées et donc $M_p \cap M_q$ est impossible.

Par σ-additivité, on a, en utilisant 3.a. :

$$P(M) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(M_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big(M_{2k+1}\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \times \frac{1-0}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \quad \text{vu que } \left|\frac{1}{4}\right| < 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{P(M) = \frac{1}{3}}$$

Remarques suite à la correction des copies

La longueur du sujet est conforme à ce que vous pouvez avoir au concours : la meilleur copie (même si elle n'a pas tout traitée) est à 20 et les notes sont étalées pour obtenir une épreuve classante. Les sujets abordent de nombreux thèmes différents : il ne faut donc pas perdre trop de temps sur une question qui n'aboutit pas car il y a probablement d'autres questions que vous pourrez traiter...
Pour prendre en compte la longueur, j'ai noté le sujet sur 25. Il y a une copie qui performe nettement à 17,7 devant 2 copies de bon niveau (14,5 et 15) et 3 autres copies très satisfaisantes (12,7; 12,7 et 10,8). Autour de la moyenne d'épreuve, on trouve juste au dessus 6 copies (entre 9.2 et 9.9) et juste au dessous 3 copies (entre 8,4 et 8,6). Les copies suivantes décrochent : un peu (1 copie à 7,4), beaucoup (5 copies entre 5,5 et 6.5) et beaucoup trop (5 copies entre 3.2 et 4,2).

Problème n° 1

Je m'appuie, pour mes remarques, sur des extraits du rapport de l'épreuve Maths C 2019 que vous pouvez retrouver sur le site de la banque PT. Commençons par des remarques générales soulignées dans le rapport :
« *Le sujet comportait, comme l'an dernier, des questions de cours, et des questions faciles, accessibles, ce qui a permis aux candidats de répondre à un nombre important de questions. A côté, comme l'an dernier, d'autres questions étaient destinées à valoriser les candidats soigneux et rigoureux; d'autres, plus difficiles, à départager les très bons candidats. Comme l'an dernier, nous déplorons que les copies ne soient pas toujours bien présentées. Dans certains cas, les candidats écrivent de façon illisible, de façon extrêmement dense, la copie n'est pas aérée, ce n'est plus de la correction, mais du déchiffrage ... avec toutes les conséquences que cela implique. [...] Certains candidats manquent d'honnêteté intellectuelle en essayant de tromper le correcteur, effectuant un calcul manifestement faux mais en concluant avoir répondu. Chez certains, c'est même systématique. Dans ce cas la copie est pénalisée.* »
Dans la suite, le rapport distingue les questions traitées « *par la majorité des candidats* » des questions traitée « *par peu de candidats* ». Cela permet de dégager la dynamique du sujet. Si vous ne traitez pas les questions traitées par la majorité, vous perdez beaucoup de places mais ces questions n'aident pas à faire la différence avec le ventre mou des candidats : elles permettent de trier « le bas du classement ». A l'inverse, si vous réussissez des questions traitées par peu de candidats alors vous vous détachez du lot : ces questions permettent de trier « le haut du classement ».

Préambule

1. Le rapport souligne « *Cette question a été traitée par la majorité des candidats.* » C'est un GRAND CLASSIQUE DE PTSI et d'analyse : pour montrer qu'une fonction est constante, on montre que sa dérivée est nulle et on obtient la constant soit en évaluant en une valeur, soit en utilisant une limite.

Le rapport pointe également « *Si certains ont justifié avec soin la dérivabilité de la fonction h sur* $]0,+\infty[$*, ce n'est pas le cas de tous.* » ce qui souligne l'importance de justifier la dérivabilité avant de calculer une dérivée.

2. Les questions 2a) et 2b), classiques de trigonométrie, ont été traitées « *par la majorité des candidats* » alors que la question 2c qui dresse le bilan des précédentes l'a été « *par une grande partie des candidats* »

Les performances de la classe sur ces questions considérées comme simple est peu satisfaisante...

Sur la question b, certains ont été gêné par le terme « comparer » du sujet recherchant une inégalité là où on pouvait établir une égalité et, sans doute, le terme était mal choisi par les concepteurs du sujets. On peut regretter que la réponse à 2c n'est pas été fournie par le sujet alors qu'elle est nécessaire pour travailler dans Partie-4 mais cela souligne que les concepteurs du sujet estiment que ces savoirs-faire de base doivent être acquis de tous les candidats...

Partie

1. RAS question traitée par tous...heureusement

2. Certains ne repère pas l'utilisation du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre! C'EST INQUIETANT!!!

N'oubliez pas d'introduire le $f(x,t)$, le $x \in \mathrm{A}$ et le $t \in \mathrm{I}$ que vous utilisez ensuite pour énoncer votre théorème.

Le rapport souligne :

« *Cette question n'a pas été traitée correctement par de très nombreux candidats. Pour ce genre de question, le jury apprécie particulièrement que le théorème utilisé soit clairement énoncé au début de la résolution. Cela permet aussi au candidat de savoir où il va, ce qu'il doit vérifier et de le montrer, clairement, méthodiquement, et non de façon trop confuse comme cela est trop souvent le cas.* »

C'est ce que vous avez fait pour ceux qui on vu le théorème même si on peut regretter une phrase d'introduction : « On va vérifier » ou « Énonçons le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre » De même, il faut donner le théorème en entier avec la conclusion et pas que les hypothèses !. N'hésitez pas aussi à mettre en valeur que c'est une implication avec un « Si ... alors ... » ce qui permet, en plus, de bien séparer les hypothèses des conclusions...

Le rapport souligne aussi : « *trop peu de candidats vérifient que le dénominateur ne s'annule pas.* »

C'était, en effet, une étape importante : il fallait justifier (et pas seulement affirmer) que $|x| < 1$ entraîne que $1 - x\cos t \neq 0$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Enfin : « *La domination est souvent affirmée sans aucune justification [...] et beaucoup de candidats écrivant des inégalités fausses* »

Pour dominer, il faut partir de la contrainte sur x ce que vous n'avez pas fait et ce qui a conduit à des inégalités fausses...

Enfin, il était important de conclure en répondant à la question : c'est à dire en explicitant $\mathrm{F}'(x)$!

3. « *Cette question n'a été traitée que par peu de candidats. Beaucoup se contentent de dire que cela vient de la question précédente, puisque « a est quelconque* »

« *Les arguments comme "la dérivabilité est une propriété locale" ou "en faisant tendre a vers 1" ne sont pas suffisants. Il faut préciser que "tout réel x de l'intervalle* $]-1,1[$ *appartient à un segment de la forme* $[-a,a]$*" ou [...] que "* $\bigcup_{a\in]0,1[} [-a,a] =]-1,1[$*"*

4. Le rapport souligne : « *Cette question n'a pas été traitée correctement par tous les candidats.* »
On en déduit donc qu'il s'agit d'une des questions qui a permis de classer les copies dans le haut du tableau.
D'abord, le théorème à utiliser étant donné, on attend :
- de voir si le candidat sait le mettre en application (calculs des bornes et de la relation entre du et dt
- de juger des compétences de raisonnements (utilisation des résultats du préambule)
- de juger des compétences calculatoires (méthodologie classique pointée dans les méthodes à connaître sur le calcul intégral)

5. RAS question traitée « *par la majorité des candidats* » où il fallait réinvestir le préambule.

6. Les sous-questions de cette questions ont été traitées « *par de nombreux candidats* »

a. En général, le résultat de cours est connu même si on peut regretter des maladresses dans vos rédactions où :
- vous confondez une solution y avec son expression $y(x)$ voir avec l'ensemble des solutions $\mathscr{S}_h$
- vous divisez par $1-x^2$ sans préciser $1-x^2 \neq 0$ ou retirez des valeurs absolues sans préciser le signe positif de l'expression

Si vous obtenez, en général, la primitive $\mathrm{A}(x) = \dfrac{1}{2}\ln|u(x)|$ en repérant $a(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1-x^2$, beaucoup ont encore des difficultés à simplifier $h(x) = e^{-\mathrm{A}(x)}$ à l'aide des propriétés du logarithme alors que le rapport signale que « *le résultat ne doit pas être gardé sous la forme* $e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}$ »

b. Il y avait plusieurs attendus dans cette question :
- la mise en œuvre de la méthode de variation de la constante
- l'expression de la solution générale et le rapport souligne que « *beaucoup de candidats ne donnent pas la solution explicite* »

Concernant la mise en place de la méthode, il y a de gros progrès à faire :
- vous devez préciser vos notations : on cherche une solution sous la forme $y = \lambda \times h$ où h est une solution homogène et λ une fonction inconnue dérivable
- vous devez éviter les erreurs classiques :
  - oubli de diviser le 2nd membre si vous utiliser la forme réduite $y' + a(x)y$ dans le premier membre
  - la solution particulière est $y_p = \lambda \times h$ (et pas simplement λ dans la solution finale)

c. RAS

d. Il fallait, de mon point du vu, pointer l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy

7 Là encore, le rapport pointe : « *Cette question a été traitée correctement par une grande partie des candidats.* »
Logique pour une question qui déroule une méthodologie classique du cours...

a. « *De trop nombreux candidats écrivent que* $a_1 = 1$ *sans aucune autre justification.* »
Dans la classe, peu de réponse à cette question simple :
$a_1 = \dfrac{y'(0)}{1!}$ (et plus généralement $a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$ pour une série entière) où $y'(0)$ s'obtient en évaluant en $x = 0$ dans l'équation.
Certain trouvent la réponse en avançant sur la question suivante lorsqu'ils identifient les coefficients constants.

b. « *Cette question a été traitée correctement par la majorité des candidats, malgré quelques erreurs de calcul* »
Je rappelle les étapes importantes de ce grand classique :
- on calcule les dérivées à l'aide du théorème de dérivation terme à terme
- on injecte ces dérivées dans l'équation et on distribue les coefficients
- on réalise des changements d'indices pour ramener des puissances x^n dans les séries entières
- on regroupe les sommes (possible car toutes convergentes) quitte à isoler certains termes
- on identifie les coefficients grâce à l'unicité du DSE

Cette dernière étape a été, en général, mal réalisée. Ici, on a : $a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k x^k = 1 \Leftrightarrow \underbrace{a_1 - 1}_{\text{terme constant}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k x^k = 0$

aussi : $a_1 - 1 = 0$ (identification des termes en x^0) et $\alpha_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ **N'oubliez pas de quantifier !**

c. Peu de réussite dans la classe alors que la question a été plutôt réussie d'après le rapport !
Nous avions pourtant traité des questions similaires et j'avais même repris ce type de question lors d'une correction en classe !

8. a. Extrait du rapport : « *Cette question demandait d'énoncer le critère de d'Alembert pour les séries numériques. Trop nombreux sont les candidats qui ne le font pas correctement. On trouve ainsi, dans les copies, de nombreuses erreurs, comme chaque année : oubli de la valeur absolue, de la limite, du cas* $\ell = 1$*, confusion entre série numérique et série entière, etc ...* »
J'ajouterai, à cette liste, que bien souvent :
- vous n'introduisez pas vos notations (utilisant $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ mais on ne sait pas que u_n est le terme général d'une série $\sum u_n$ avec $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang)
- vous être très floue et imprécis dans vos conclusion avec « CV » au lieu de « la série converge » et il serait bon de préciser « converge absolument »

b. « *Cette question n'a été traitée que par peu de candidats.* »

c. « *Cette question n'a été traitée que par un faible nombre de (très bons) candidats.* » et aucun dans la classe.

Problème n° 2

Là encore, disposant des rapports d'épreuves, je vais pouvoir souligner mes remarques à l'aide de commentaire du rapport.

Partie I

Extrait du rapport d'épreuve : « *Cette partie ne comportait aucune difficulté particulière et était essentiellement calculatoire (avec des calculs relativement simples). Elle a permis d'éliminer les trop nombreux candidats qui ne connaissent toujours pas les conditions de diagonalisation d'une matrice alors qu'il s'agit d'un des résultats majeurs du programme d'algèbre linéaire de seconde année, et que cela est demandé quasiment chaque année lors de cette épreuve! Bien que simples, ces calculs ont posé pas mal de problèmes à certains candidats avec de nombreuses erreurs [..], le plus souvent faute de méthodologie rigoureuse pour mener ces calculs à bien. Un recul sur les résultats obtenus permettrait de détecter certaines erreur [...] .* »

1. Vous avez, en général, repéré le théorème spectral. N'oubliez pas de préciser que les matrices sont symétriques réelles.

2. RAS

3. Des erreurs dans les calculs de polynômes caractéristiques mais trop peu d'entre vous utilise les auto-contrôles (le polynôme caractéristique est de degré la taille de la matrice et il est unitaire, vérification que la trace est égale à la somme des valeurs propres).

Vous devez mettre en avant vos résultats de cours : quelle est la formule de changement de base? comment construire la matrice de passage? Même, si vous n'obtenez que des informations partielles à cause de difficultés calculatoire, exploiter les au maximum pour permettre au correcteur de juger de vos connaissances et compétences.

Dans la détermination des sev propres :

- N'oubliez pas l'argument de dimension! Vous ne recherchez qu'un nombre précis de vecteurs (à l'aide des colonnes de $A-\lambda I$) car vous connaissez la dimension de Ker $(A-\lambda I)$ soit à l'aide d'un théorème (valeur propre simple associée à un sev propre de dimension 1 ou A diagonalisable donc la dimension vaut la multiplicité ou utilisation du théorème du rang) soit par un calcul préalable de rang
- Pensez à exploiter la totalité des résultats du théorème spectral : les sev propres associés à des vp distinctes sont 2 à 2 orthogonaux
- pour obtenir une matrice de passage orthogonale, vous devez réunir des bases orthogonales (que vous normerez ensuite) de vecteurs propres des sev propres. Vous ne pouvez donc pas prendre une base quelconque ou alors il faudra l'orthonormaliser. Ainsi, la stratégie (càd l'ordre dans lequel on détermine ces sev) est importante pour être efficace dans les calculs.
- Ne pas oubliez de normer les vecteurs de la base de diagonalisation qu'on entre dans la matrice de passage sinon la matrice de passage ne sera pas orthogonale (matrice de passage d'une BON à une base orthonormée!)

Partie II

Pour construire cette partie, je me suis inspirée de la question 3 du sujet Banque PT de 2020.

1. Beaucoup de réponse non justifiée or, comme le souligne le rapport, « *" sans calcul " ne veut pas dire " sans justification "*. »

Ici, il fallait remarquer que Q est une matrice de passage d'une base orthonormée directe (la base canonique) à une autre base orthonormée directe. Il fallait donc vérifier que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthonormée directe.

2. Même constat que le rapport : « *il y a ceux qui se trompent dans le calcul de $\vec{e_3}$, ceux qui se trompent dans l'ordre des colonnes de* P *(et ceux qui échangent lignes et colonnes)* »

3. « *Trop peu de candidats connaissent la méthode à utiliser[... et] aussi ceux qui pensent que les correcteurs vont faire ou finir leurs calculs* »

Il s'agissait de trouver l'axe et l'angle d'une rotation de l'espace ce qui avait été longuement détaillé et travaillé en classe.

Partie III

Je peux reprendre "mot pour mot" les commentaires du rapport d'épreuve :

1. a. « *Tout d'abord, il serait souhaitable que les candidats respectent l'orthographe de "théorème spectral" et de "ellipse".*

La majorité des candidats connaissent le principe d'étude d'une conique et ont reconnu une ellipse.

*Malheureusement, peu (*10%*) sont arrivés au bout sans erreur. Les principaux problèmes rencontrés sont :*

- Une matrice P *non orthogonale*

- Des erreurs de calculs (les candidats devraient prendre le temps et la place de les mener)

- Un centre dont les coordonnées n ?ont pas été données dans le repère demandé

- La difficulté pour les correcteurs de trouver dans quel repère les équations et coordonnées sont données

- Des sommets en nombre insu ?sant.

Les réponses ont rarement été mises en évidence, les correcteurs ont souvent eu du mal à les trouver! »

b. *La bonne nouvelle, c'est que nombreux ont été les candidats qui se sont lancés (avec plus ou moins de succès) dans le tracé.*

Les éléments cherchés par les correcteurs sont :

- Les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ avec la bonne longueur

- Les vecteurs "de la nouvelle base" et le centre de l'ellipse

- Les 4 sommets avec un tracé pas "pointu" au niveau de ces sommets

- Le dessin est dans la feuille (ce qui nécessite une réflexion pour placer l ?origine du repère... mieux valait commencer par placer le centre de la conique) »

2. « *Des candidats essayent de discuter les cas a priori et finissent par en oublier. La discussion sur le signe de a^2-b^2 s'est souvent terminées en une discussion sur le signe de $a-b$.* »

Partie IV

1. **a.** Cette première question avait pour objectif de vérifier votre capacité à lire et à identifier les probabilités conditionnelles données par le texte. Bien souvent, vous avez voulu "faire un calcul" pour justifier $P(E_2|E_1)$ via $P(E_2|E_1) = \dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$. Mais, vous affirmez alors que $P(E_1 \cap E_2) = \dfrac{1}{4}$...qui n'est pas une donnée du texte...et que vous obtenez en réalisant implicitement par les probas composées $P(E_1 \cap E_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = P(E_1) \times P(E_2|E_1)$...Bref, vous utilisez donc $P(E_2|E_1) = \dfrac{1}{2}$ pour prouver $P(E_2|E_1) = \dfrac{1}{2}$ ce qui ne tient pas!

De même, la propriété " $\left\{E_1, \overline{E_1}\right\}$ est un système complet d'événements " n'est pas une formule magique : il faut l'utiliser à bon escient (de façon analogue au résultat de croissance comparée pour les calculs de limites) et elle n'est d'aucune utilité pour expliquer les probabilités conditionnelles!

Le sujet guidait naturellement vers l'exploitation de la formule des probabilités totales avec le système complet $\{E_1, \overline{E_1}\}$. Toutefois, certains ont remarqué (mais il fallait le justifier) que $E_2 = E_1 \cap E_2$ permettant aussi d'obtenir le résultat.

L'objectif finale de la question était de pointer que E_1 et E_2 ne sont pas indépendants anticipant une erreur à éviter en question 1c

b. Là encore, aucun calcul à faire mais une bonne explication du texte suffit!

c. Il est assez simple d'obtenir $F_n = \bigcap_{k=1}^{n} E_k$ mais il n'est pas possible de conclure par indépendance à cause de la question 1a. Le sujet a pourtant pris de nombreuse précaution pour vous mettre sur la direction de l'utilisation de la formule des probabilités composées avec 1b mais cela n'a pas éviter que de nombreux étudiants tombent dans le piège...

d. Le résultat de continuité décroissante a été, en général, repérée.

e. Cette question a été mal traitée en général : dire $P(\overline{F}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ne suffit pas! Votre réponse doit clairement expliciter que l'événement "Il y a un vainqueur à ce tournoi" est l'événement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{F_n}$ et qu'il s'agit de prouver $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{F_n}\right) = 1$

Le plus simple est de remarquer $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{F_n} = \overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n}$ et de passer par le complémentaire (voir corrigé)

Sinon, il faut justifier via : $F_{n+1} \subset F_n \Rightarrow \overline{F_n} \subset \overline{F_{n+1}}$ et utiliser la continuité croissante : $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{F_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} P(\overline{F_n}) = \lim_{n\to+\infty} (1 - P(F_n)) = 1$

2. **a.** Vous êtes très nombreux à écrire $P(M) = \dfrac{1}{2}$ ou $P(M) = \dfrac{1}{4}$ confondant M avec $M \cap \overline{E_1} = M_1$ (défini ensuite en 3a) où M_1 est l'événement Marie gagne à la première partie! Le calcul de $P(M)$ ne s'effectue qu'à la question 3c et il aboutit à $P(M) = \dfrac{1}{3}$...

Il n'y avait pas à calculer $P(M)$ dans cette question mais à établir $P(M) = P(L|E_1)$ (sans connaître ces probabilités) et cela s'obtient par du raisonnement et pas par du calcul...

De même, la seconde égalité demandée $L = L \cap E_1$ est une égalité d'événements, pas de probabilités!

b. Le résultat s'obtient facilement en exploitant la formule des probabilités composées et en s'appuyant sur les résultats de 2a

3. **a.** Mise à part des opérations farfelues (quel sens donner à $M_{2n} + M_{2n+1}$? M_{2n} et M_{2n+1} sont des événements...pas des probabilités!), vous avez, en général, compris que $M_{2n} = \emptyset$ de par la configuration du jeu...

b. Le sujet était, à nouveau, bien guidé : l'égalité d'événement conduit naturellement à exploiter la formule des probabilités composées. La probabilité $P(F_{2n}) = \dfrac{1}{2^{2n}}$ est donnée en 1c. Il reste à expliquer $P(M_{2n+1}|F_{2n}) = \dfrac{1}{4}$ avec le texte...et à finaliser le calcul des puissances

c. Un dernier calcul par sigma additivité d'événements incompatibles qui se finalise par un calcul classique de somme géométrique.

Attention, $M = \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} M_{2n+1}$ avec cette deuxième union qui commence à $n = 0$ pour inclure l'événement M_1 !

vu que $M_{2n} = \emptyset$