

Lycée Paul Constans

Année 2025/2026

Classe de PT

Concours Blanc de Mathématiques

Durée : 4 heures - La calculatrice n'est pas autorisée.

Voici le préambule présent sur chacun des sujets de mathématiques recopié à l'identique.
Les mots en gras sont donc ceux pointés par le jury du concours.

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Ce sujet est constituée de deux problèmes indépendants :

Le premier problème (1h45-2h) est un extrait (préambule et une grande part de la partie II) du sujet maths C de Banque PT 2019.

Le second problème est en quatre parties totalement indépendantes :

- la partie I (20-30 min) est celle du sujet maths A de Banque PT 2018
- la partie II (20-30 min) est inspirée du sujet maths B de Banque PT 2020
- la partie III (30-40 min) est un extrait du sujet maths B de Banque PT 2022
- la partie IV (30-40 min) est un exercice de probabilité du même type que ceux de l'épreuve de maths A.



Préambule

1. Soit h la fonction qui, à tout réel strictement positif x , associe : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.
Montrer que la fonction h est constante sur $]0, +\infty[$ (on précisera la valeur prise par h sur $]0, +\infty[$)
2. a. Pour tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, exprimer $\cos t$ en fonction de $\cos \frac{t}{2}$
b. Pour tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, comparer $\frac{1}{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}$ et $\cos^2 \frac{t}{2}$
c. Pour tout réel t de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $u = \tan \frac{t}{2}$. On demande d'exprimer $\cos t$ en fonction de u .

Partie

Pour tout réel x de $] -1, 1[$, on pose : $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x \cos t}$

1. Que vaut $F(0)$?
2. Soit $a \in]0, 1[$.
Étudier la dérivabilité de F sur $[-a, a]$ et exprimer, pour tout réel x de $[-a, a]$, $F'(x)$ en fonction de x .
3. Étudier la dérivabilité de F sur $] -1, 1[$.
4. À l'aide du changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ montrer que, pour tout réel x de $] -1, 1[$:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$$

(On pensera à utiliser le préambule)

5. En déduire, pour tout réel x de $] -1, 1[$, une relation entre $F(x)$ et $F(-x)$
Pour ce qui suit, on utilisera et on admettra le fait que, pour tout x de $] -1, 1[$: $(1-x^2)F'(x) = xF(x) + 1$
6. a. Donner la solution générale sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle homogène : $(\mathcal{E}_0) \quad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0$
b. À l'aide de la méthode de variation de la constante, donner la solution générale sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle :
 $(\mathcal{E}) : \quad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1$
c. Donner les solutions respectives des problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_0) : \begin{cases} (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_1) : \begin{cases} (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- d. Pour tout x de $] -1, 1[$, déduire de la résolution de (\mathcal{P}_1) une expression simplifiée de $F(x)$ avec la fonction arcsinus.
7. Dans cette question, on recherche les solutions développables en série entière sur un domaine $] -R, R[\subset \mathbb{R}$, $R > 0$ de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_R) : \quad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1, \quad \forall x \in] -R, R[$$

sous la forme : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\forall x \in] -R, R[$ où, pour tout entier naturel n , a_n est un réel.

On pose : $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$

- a. Que vaut a_1 ?
 - b. Donner, pour tout entier naturel non nul n , une relation de récurrence reliant a_{n+1} et a_{n-1} .
 - c. Exprimer, pour tout entier naturel p , a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p et λ
8. On suppose désormais que : $\lambda = 0$
- a. Énoncer le critère de d'Alembert pour les séries numériques
 - b. Déterminer la valeur du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$
 - c. À l'aide de la question 6.c, donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (\arcsin x)^2$. On précisera le rayon de convergence et le(s) théorème(s) utilisé(s).

Les quatre parties de ce problème sont totalement indépendantes

Première Partie.

On considère les matrices carrées $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans \mathbb{R} ?
2. Calculer A^2 .
3. Déterminer une matrice P telle que $P^T A P$ et $P^T B P$ soient des matrices diagonales qu'on précisera.

Deuxième Partie

Dans cette partie, \vec{a} désigne le vecteur $3\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{6}\vec{k}$ où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3

On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{4}(\vec{i} + 3\vec{j} - \sqrt{6}\vec{k})$ et $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$.

On note Q la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Sans calculer la matrice Q, donner la nature de l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à Q.
On ne demande pas de donner ses éléments caractéristiques dans cette question.
2. Déterminer la matrice Q.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f .

Troisième Partie

L'espace euclidien \mathbb{R}^2 est muni de son produit scalaire et de son repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ usuels.

Soient a et b deux réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.

On considère une conique $C_{a,b}$ d'équation : $ax^2 + 2bxy + ay^2 - 4(x + y) = 4$

1. Dans cette question uniquement $a = 5$ et $b = -3$.
 - a. Etudier la conique $C_{5,-3}$
On donnera en particulier :
 - une équation réduite en précisant le repère dans lequel elle est obtenue,
 - sa nature,
 - les coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de son centre,
 - les coordonnées dans le repère de votre choix (à préciser) de ses sommets.
 - b. Tracer la conique $C_{5,-3}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On utilisera la feuille de papier millimétré fournie et on prendra une unité de 4 cm.
2. Déterminer en fonction de a et b le type de conique qu'est $C_{a,b}$.

Quatrième Partie

Marie et Louis sont deux bons joueurs d'échecs qui, lorsqu'ils jouent l'un contre l'autre, font invariablement une partie nulle. Pour se départager, ils décident de jouer contre un ordinateur. Un des joueurs commence.

S'il gagne la partie, alors il est déclaré gagnant. Si la partie est perdue, l'ordinateur est déclaré vainqueur.

Dans ces deux cas, le tournoi s'arrête. Dans le cas d'une partie nulle, c'est au tour de l'autre joueur de jouer contre l'ordinateur selon le même protocole. Le jeu continue jusqu'à ce qu'un joueur ou l'ordinateur soit déclaré gagnant.

Lors d'une partie d'un joueur contre l'ordinateur, la probabilité d'une partie nulle est égale à $\frac{1}{2}$ et celle que le joueur gagne est égale à $\frac{1}{4}$ (et donc celle que l'ordinateur gagne est aussi égale à $\frac{1}{4}$). On introduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les événements

• E_n : « la n -ième partie est jouée et c'est une partie nulle. »

• F_n : « les n premières parties ont été jouées et ont toutes été des parties nulles »

1. a. Déterminer et justifier les probabilités conditionnelles $P(E_2|E_1)$ et $P(E_2|\overline{E_1})$ puis la probabilité $P(E_2)$.

Les événements E_1 et E_2 sont-ils indépendants?

b. Pour $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, déterminer et justifier la probabilité conditionnelle $P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_{n-1})$.

c. Exprimer F_n à l'aide des événements $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En déduire que $P(F_n) = \frac{1}{2^n}$

d. Comparer les événements F_n et F_{n+1} . En déduire la valeur de $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n\right)$.

e. Conclure qu'il est presque sûr qu'il y ait un vainqueur à ce tournoi.

2. Louis propose à Marie de commencer mais elle refuse en disant que, dans ce cas, les chances de gagner de Louis seront plus faibles que les siennes. Pour vérifier cette affirmation, on suppose, dans cette question, que Marie commence à jouer.

On introduit les événements L : « Louis gagne le tournoi » et M : « Marie gagne le tournoi »

a. Expliquer les égalités $P(M) = P(L|E_1)$ et $L = L \cap E_1$

b. En déduire que Marie a, en effet, deux fois plus de chance de gagner que Louis.

3. Dans cette question, on suppose toujours que Marie a joué la première partie.

On introduit l'événement, pour $n \in \mathbb{N}^*$: M_n : « Marie joue la n -ième partie et elle gagne »

a. Justifier que $P(M_{2n}) = 0$

b. Expliquer l'égalité $M_{2n+1} = F_{2n} \cap M_{2n+1}$ et en déduire que $P(M_{2n+1}) = \frac{1}{4^{n+1}}$

c. Exprimer M à l'aide des événements $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et calculer alors $P(M)$