

Exercice d'Analyse

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que $f_n = [t \mapsto (\sin t)e^{-nt}]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et justifier que $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{n^2 + 1}$

$f_n = [t \mapsto (\sin t)e^{-nt}]$ est bien continue sur $[0, +\infty[$ avec $|f_n(t)| \leq e^{-nt}$ or $[t \mapsto e^{-nt}]$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ vu que $n > 0$ donc, par majoration, on conclut que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} (\sin t)e^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} \Im(e^{it} e^{-nt}) dt = \Im \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-n)t} dt \right) = \Im \left(\left[\frac{e^{(i-n)t}}{i-n} \right]_0^{+\infty} \right) \text{ mais}$$

$$\left| \frac{e^{(i-n)t}}{i-n} \right| = \frac{|e^{it}| \times e^{-nt}}{|i-n|} = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{1+n^2}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad (n > 0) \text{ donc : } \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \Im \left(0 - \frac{1}{i-n} \right) = \Im \left(\frac{n+i}{n^2+1} \right) = \frac{1}{n^2+1}$$

2. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt$

$f = \left[t \mapsto \frac{\sin t}{e^t - 1} \right]$ est C^0 sur $]0, +\infty[$ où $e^t > 1$ donc $e^t - 1 \neq 0$

En 0 : $f(t) \sim_0 \frac{t}{t} \sim_0 1$ donc faussement généralisée avec prolongement continue par $f(0) = 1$

En $+\infty$: $f(t) \sim_{+\infty} \frac{\sin t}{e^t} = (\sin t)e^{-t} = f_1(t)$ or f_1 est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après Q1

3. Prouver que, pour $t > 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{1}{e^t - 1}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-t})^n \text{ est une série géométrique de raison } q = e^{-t} \in]0, 1[\quad (t > 0) : \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = e^{-t} \times \frac{1-0}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1}$$

4. Démontrer alors que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ On rappelle que $|\sin t| \leq t$ pour $t > 0$

On écrit $S(t) = \frac{\sin t}{e^t - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin t)e^{-nt} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$ et on applique le théorème d'intégration terme à terme

Si

- 1) S est continue sur $I =]0, +\infty[$ (déjà prouvé en Q2)
- 2) Toutes les fonctions f_n sont intégrables sur I (déjà prouvé en Q1)
- 3) La série $\sum u_n$ converge où $u_n = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$

alors le théorème s'applique donc et on peut donc conclure que :

a) S est intégrable sur I et b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} S(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ avec Q1

On a, pour $t > 0$: $0 \leq |f_n(t)| = |\sin t|e^{-nt} \leq t \times e^{-nt}$

Par intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-nt} \end{cases}$ soit $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\frac{e^{-nt}}{n} \end{cases}$ où u et v sont C^1 sur I , on a sous réserve d'existence :

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \left[t \times \frac{e^{-nt}}{-n} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \times \frac{e^{-nt}}{-n} dt$$

On justifie la convergence de deux termes sur les trois :

- $[u(t)v(t)]_0^{+\infty} = \left[t \times \frac{e^{-nt}}{-n} \right]_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t}{n} e^{-nt} - 0 = 0$ par croissance comparée
- $\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-nt} dt = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$ est une intégrale de référence convergente avec $\alpha = n > 0$

Ainsi : $\int_0^{+\infty} te^{-nt} dt$ converge absolument et : $\int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = 0 + \frac{1}{n^2}$

Mais alors, par croissance de l'intégrale : $\forall t > 0$, $0 \leq |f_n(t)| \leq te^{-nt}$ entraîne que : $0 \leq u_n = \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \leq \frac{1}{n^2}$

On conclut alors, par majoration, que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge puisque $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente

Soit x un réel, on définit, lorsque cela est possible : $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$

1. Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, on introduit : $g_x = \left[t \mapsto \frac{1}{t^x \sqrt{t^2 - 1}} \right]$.

a. Justifier que g_x est continue et positive sur $]1, +\infty[$

Comme $t^2 - 1 > 0$ sur $]1, +\infty[$, $[t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}]$ est positive et C^0 sur $]1, +\infty[$ (par composition) et ne s'y annule pas. De même, pour tout x réel, $[t \mapsto \frac{1}{t^x}] = [t \mapsto e^{-x \ln t}]$ est aussi C^0 , positive sur $]1, +\infty[$ et ne s'y annule pas.

Aussi, par produit et quotient, g_x est C^0 et positive sur $]1, +\infty[$

b. Montrer que la fonction ch réalise une bijection de $]0, \ln(2 + \sqrt{3})[$ dans $]1, 2[$.

En déduire que $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$ converge et préciser sa valeur.

D'après le cours, ch est C^0 et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ donc aussi sur $I =]0, \ln(2 + \sqrt{3})[$: elle réalise donc une bijection de I dans $J =]\text{ch} 0, \text{ch}(\ln(2 + \sqrt{3}))[$

$$\text{or } \text{ch} 0 = 1 \text{ et } \text{ch}(\ln(2 + \sqrt{3})) = \frac{2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{4 + 4\sqrt{3} + 3 + 1}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{4(2 + \sqrt{3})}{2(2 + \sqrt{3})} = 2$$

donc ch réalise une bijection de $]0, \ln(2 + \sqrt{3})[$ dans $]1, 2[$

On pose $t = \text{ch } u$ dans l'intégrale $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$. Pour le calcul : $t = \text{ch } u$, $dt = (\text{sh } u)du$, $u \begin{vmatrix} 0 \\ \ln(2 + \sqrt{3}) \end{vmatrix}, t \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$

Le théorème de changement de variable s'applique puisque la fonction $\varphi = \text{ch}$ est de classe C^1 , strictement croissante et bijective de $]0, \ln(2 + \sqrt{3})[$ dans $]1, 2[$ alors $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$ a la même nature que $\int_0^{\ln(2 + \sqrt{3})} \frac{\text{sh } u}{\sqrt{\text{ch}^2 u - 1}} du$ mais :

$$\int_0^{\ln(2 + \sqrt{3})} \frac{\text{sh } u}{\sqrt{\text{ch}^2 u - 1}} du = \int_0^{\ln(2 + \sqrt{3})} \frac{\text{sh } u}{\sqrt{\text{sh}^2 u}} du = \int_0^{\ln(2 + \sqrt{3})} \frac{\text{sh } u}{\text{sh } u} du = \int_0^{\ln(2 + \sqrt{3})} 1 du = \ln(2 + \sqrt{3}) \text{ est bien une intégrale convergente}$$

Ainsi, on peut conclure que $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$ converge et que $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \ln(2 + \sqrt{3})$

c. En déduire que $\int_1^2 g_x(t)dt$ est convergente pour tout x réel.

Avec 1a), g_x est C^0 et positive sur $]1, 2[$ et, pour x réel fixé :

$$t^x = e^{x \ln t} \sim_{t \rightarrow 1} e^0 = 1 \Rightarrow g_x(t) \sim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} \text{ et ces expressions sont positives sur }]1, 2[$$

donc, par le critère d'équivalence : $\int_1^2 g_x(t)dt$ et $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$ ont la même nature.

Mais $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$ converge d'après 1b) donc $\int_1^2 g_x(t)dt$ est convergente pour tout x réel

d. Démontrer que $\int_2^{+\infty} g_x(t)dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

Avec 1a), g_x est C^0 et positive sur $[2, +\infty[$ et : $t^2 - 1 \sim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \Rightarrow \sqrt{t^2 - 1} = (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \sim_{t \rightarrow +\infty} (t^2)^{\frac{1}{2}} = t$ (car $t > 0$)

aussi : $g_x(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^x \times t} = \frac{1}{t^{x+1}} > 0$ Par critère d'équivalence, $\int_2^{+\infty} g_x(t)dt$ et $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ ont la même nature. Or, la 2nd est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 1 + x$ qui converge si et seulement si $\alpha = 1 + x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Conclusion : $\int_2^{+\infty} g_x(t)dt$ converge si et seulement si $x > 0$

e. En déduire le domaine de définition I de f c'est à dire les valeurs du réel x telles que $f(x)$ existe.

Si $x > 0$ alors $\int_1^2 g_x(t)dt$ et $\int_2^{+\infty} g_x(t)dt$ convergent donc $f(x) = \int_1^{+\infty} g_x(t)dt$ converge. Aussi : $]0, +\infty[\subset I$

Si $x \leq 0$ alors $\int_1^2 g_x(t)dt$ converge et $\int_2^{+\infty} g_x(t)dt$ diverge donc $f(x) = \int_1^{+\infty} g_x(t)dt$ diverge et : $I \subset]0, +\infty[$

Finalement, f est définie sur $]0, +\infty[$

2. En posant $t = \operatorname{ch} u$, calculer $f(1)$ et $f(2)$.

(On pourra remarquer que $\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2e^x}{1+(e^x)^2}$ et que la dérivée de $x \mapsto \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ est $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$)

On veut calculer $f(1) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$ et $f(2) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}$ qu'on sait convergente par la question 1.

On pose $t = \operatorname{ch} u$ ce qui est possible car le théorème de changement de variables s'applique puisque la fonction $\varphi = \operatorname{ch}$ est C^1 et strictement croissante donc bijective de $]0, +\infty[$ dans $]1, \lim_{u \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} u[=]1, +\infty[$

Pour le calcul : $t = \operatorname{ch} u$, $dt = (\operatorname{sh} u)du$, $u \Big|_0^{+\infty}$, $t \Big|_1^{+\infty}$

La nature convergente des intégrales $f(1)$ et $f(2)$ a déjà été prouvée puisque $1 > 0$ et $2 > 0$ et on a :

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}} du = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u \times \operatorname{sh} u} du = \int_0^{+\infty} \frac{2e^u}{(e^u)^2 + 1} du = \left[2 \operatorname{Arctan}(e^u) \right]_0^{+\infty} = 2 \times \frac{\pi}{2} - 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = f(1)$$

$$f(2) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} du = \left[\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} \right]_0^{+\infty} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} = 1 = f(2) \text{ puisque } \operatorname{sh} u \sim_{+\infty} \frac{e^u}{2} \sim_{+\infty} \operatorname{ch} u$$

3. Vérifier que f est positive et décroissante sur I .

On a vu que g_x est C^0 et positive sur $]1, +\infty[$ donc, par positivité de l'intégrale, $f(x) = \int_1^{+\infty} g_x(t) dt \geq 0$ pour $x > 0$.

De plus, pour $t > 1$, $-\ln t < 0$ aussi : $0 < x \leq y \Rightarrow -x(\ln t) \geq -y(\ln t) \Rightarrow \frac{1}{t^x} \geq \frac{1}{t^y}$ par croissance de l'exponentielle.

$$\Rightarrow g_x(t) \geq g_y(t) \text{ puisque } \sqrt{1-t^2} > 0$$

alors, en intégrant sur $]1, +\infty[$ ce qui est possible pour $y \geq x > 0$ puisque les intégrales $f(x)$ et $f(y)$ convergent d'après 1, on a, par croissance de l'intégrale : $f(x) \geq f(y)$ pour $0 < x \leq y$ ce qui prouve que f est décroissante sur I .

En définitive, f est positive et décroissante sur I .

4. Soit $x \in I$.

a. Démontrer que : $f(x) - f(x+2) = \int_1^{+\infty} t^{-x-2} \sqrt{t^2-1} dt$

Pour $x > 0$:

$$f(x) - f(x+2) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t^2-1}} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+2} \sqrt{t^2-1}} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^x \sqrt{t^2-1}} - \frac{1}{t^{x+2} \sqrt{t^2-1}} \right) dt \text{ par linéarité.}$$

(C'est possible car 2 des trois intégrales sont convergentes ($f(x)$ et $f(x+2)$) convergent puisque $x > 0$ et $x+2 > 0$)

$$\text{soit } f(x) - f(x+2) = \int_1^{+\infty} \frac{t^2-1}{t^{x+2} \sqrt{t^2-1}} dt = \int_1^{+\infty} t^{-x-2} \sqrt{t^2-1} dt = f(x) - f(x+2) \text{ puisque } \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2-1}} = \sqrt{t^2-1}$$

Remarque : la convergence de la 3ème intégrale est assurée par la linéarité

- b. Démontrer la relation : $f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$. On pourra réaliser une intégration par parties.

Méthode 1 : Pour $x > 0$: $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t^2-1}} = \int_1^{+\infty} t^{-x-1} \times \frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}} dt$

On réalise une intégration par parties (IPP) dans cette intégrale :

$$\text{avec } \begin{cases} u'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{t^2-1}} \\ v(t) = t^{-x-1} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} u(t) = \sqrt{t^2-1} \\ v'(t) = -(x+1)t^{-x-2} \end{cases} \text{ où les fonctions } u \text{ et } v \text{ sont } C^1 \text{ sur }]1, +\infty[$$

$$u(t)v(t) \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{t^2}}{t^{x+1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^x} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } x > 0 \text{ et } u(t)v(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0 \text{ aussi } [u(t)v(t)]_1^{+\infty} \text{ converge vers } 0$$

On sait que l'intégrale $f(x)$ converge et $[u(t)v(t)]_1^{+\infty}$ converge vers 0 donc l'IPP est possible et on a :

$$f(x) = 0 - \int_1^{+\infty} (-(x+1)t^{-x-2} \sqrt{t^2-1}) dt = (x+1) \left(f(x) - f(x+2) \right) \Leftrightarrow (1 - (x+1)) f(x) = -(x+1) f(x+2)$$

$$\Leftrightarrow f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$$

Méthode 2 : On réalise une intégration par parties (IPP) dans $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{x+2}} dt = f(x) - f(x+2)$

$$\begin{cases} u'(t) = t^{-x-2} \\ v(t) = \sqrt{t^2-1} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} u(t) = \frac{t^{-x-1}}{-x-1} \\ v'(t) = \frac{t}{2\sqrt{t^2-1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} \end{cases} \quad \text{où les fonctions } u \text{ et } v \text{ sont } C^1 \text{ sur }]1, +\infty[\quad (-x-1 \neq 0 \text{ car } x > 0)$$

On sait déjà que l'intégrale de départ converge (par la linéarité dans la question précédente)

Convergence de $\left[u(t)v(t) \right]_1^{+\infty}$?

$$u(t)v(t) = \frac{t^{-x-1}}{-x-1} \sqrt{t^2-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{t^{-(x+1)} \sqrt{t^2}}{x+1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{t^{-x}}{x+1} = -\frac{e^{-x \ln t}}{x+1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } x > 0$$

$$u(t)v(t) = -\frac{1}{1+x} e^{-(x+1) \ln t} \sqrt{t^2-1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 0 \text{ aussi } \left[u(t)v(t) \right]_1^{+\infty} \text{ converge vers } 0.$$

$$\text{L'IPP est donc possible et on a : } f(x) - f(x+2) = 0 - \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x-1}}{-x-1} \times \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt = \frac{1}{1+x} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{1-t^2}}$$

$$\text{Ainsi : } f(x) - f(x+2) = \frac{f(x)}{1+x} \Leftrightarrow f(x+2) = \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) f(x) \Leftrightarrow \boxed{f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)}$$

5. a. Pour x réel strictement positif, on pose : $\Phi(x) = x f(x) f(x+1)$. Prouver que : $\Phi(x+1) = \Phi(x)$.

$$\text{Pour } x > 0 : \Phi(x+1) = (x+1) f(x+1) f(x+2) = f(x+1) \times (x+1) f(x+2) = f(x+1) \times x f(x) \text{ avec 4b soit } \boxed{\Phi(x+1) = \Phi(x)}$$

b. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$.

La suite $(\Phi(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite constante aussi on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Phi(n) = \Phi(1) = 1 \times f(1) f(2) = \frac{\pi}{2}$ d'après 2.

$$\text{Aussi, en divisant par } n \neq 0, \text{ on a bien : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) f(n+1) = \frac{\pi}{2n}}$$

c. En déduire que : $f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Attention! On ne peut pas écrire $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n+1 \Rightarrow f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f(n+1)$ car on ferait de la composition d'équivalents...
Comme f est décroissante sur $]0, +\infty[$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(n+2) \leq f(n+1) \leq f(n) \Rightarrow \frac{f(n+2)}{f(n)} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq 1 \text{ puisque } f(n) > 0 \text{ (on a le strictement avec 5)}$$

$$\text{Aussi, avec 4b) : } \frac{n}{n+1} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq 1 \text{ d'où, par le théorème des gendarmes : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 1 \Leftrightarrow f(n+1) \sim f(n)$$

$$\text{Alors, avec 6b, on a : } f(n)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n} \Rightarrow \boxed{f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \text{ (en passant à la racine ce qui est autorisé avec les équivalents)}$$

6. Ne traiter cette question que si tout le reste a été traité

Donner l'expression de $f(2p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et de $f(2p+1)$ pour $p \in \mathbb{N}$ à l'aide de factorielle.

$$f(2p) = f((2p-2)+2) = \frac{2p-2}{2p-1} f(2p-2) = \frac{(2p-2)(2p-4)}{(2p-1)(2p-3)} f(2p-4) = \dots = \frac{(2p-2)(2p-4) \dots 2}{(2p-1)(2p-3) \dots 1} f(2)$$

$$f(2p+1) = f((2p-1)+2) = \frac{2p-1}{2p} f(2p-1) = \dots = \frac{(2p-1)(2p-3) \dots 1}{(2p)(2p-2) \dots 2} f(1)$$

On ajoute les termes d'indice pair manquant au dénominateur de $f(2p)$ pour avoir $(2p-1)!$ et au numérateur de $f(2p+1)$

$$\text{pour avoir } (2p)! : f(2p) = \frac{((2p-2)(2p-4) \dots 2)^2}{(2p-1)!} \times 1 \quad \text{et} \quad f(2p+1) = \frac{(2p)!}{((2p)(2p-2) \dots 2)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

On factorise les 2 dans tous les termes du carré (il y a $p-1$ fois 2 en facteur pour $f(2p)$ et p pour $f(2p+1)$) :

$$f(2p) = \frac{(2^{p-1}(p-1)!)^2}{(2p-1)!} \quad \text{et} \quad f(2p+1) = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2}. \text{ Ainsi : } \boxed{f(2p) = \frac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}} \quad \text{et} \quad \boxed{f(2p+1) = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}}$$

ce qu'on démontre rigoureusement pour $p \in \mathbb{N}^*$ avec une récurrence simple sur p .

Il s'agit d'une grande partie du second problème du sujet Maths A 2024

Pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieur ou égal à n .

Soit φ , l'application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2, \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^3 P(k)Q(k)$

On considère également les polynômes $L_p(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^3 \frac{x-k}{p-k}$ pour $p \in \{0; 1; 2; 3\}$

1. a. Vérifier que $L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)$

Par définition : $L_0(X) = \frac{X-1}{0-1} \times \frac{X-2}{0-2} \times \frac{X-3}{0-3} = (-1)^3 \frac{1}{2 \times 3} (X-1)(X-2)(X-3) \Leftrightarrow L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)$

b. Ecrire de même $L_1(X)$, $L_2(X)$ et $L_3(X)$

$$L_1(X) = \frac{X}{1-0} \times \frac{X-2}{1-2} \times \frac{X-3}{1-3} = (-1)^2 \frac{1}{1 \times 2} X(X-2)(X-3) \text{ soit } L_1(X) = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3)$$

$$L_2(X) = \frac{X}{2-0} \times \frac{X-1}{2-1} \times \frac{X-3}{2-3} = (-1)^1 \frac{1}{2} X(X-1)(X-3) \text{ soit } L_2(X) = -\frac{1}{2}X(X-1)(X-3)$$

$$L_3(X) = \frac{X}{3-0} \times \frac{X-1}{3-1} \times \frac{X-2}{3-2} = \frac{1}{3 \times 2} X(X-1)(X-2) \text{ soit } L_3(X) = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2)$$

c. Déterminer les valeurs $L_p(k)$ pour tout $(p, k) \in \llbracket 0, 3 \rrbracket^2$

En évaluant : $\forall (p, q) \in \llbracket 0, 3 \rrbracket^2, \quad L_p(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq k \\ 1 & \text{si } p = k \end{cases}$

2. a. Démontrer que φ est un produit scalaire du $\mathbb{R}_3[X]$. On notera $\| \cdot \|$ la norme associée.

On vérifie que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive

(1) (3) (2) (5) (5)

(1) Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$, $\varphi(P, Q)$ est défini et c'est un réel (somme de 4 nombres réels)

(2) Par définition, on a clairement $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$ pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ par commutativité du produit de réels.

(3) Puisque φ est symétrique, il suffit d'établir une linéarité à savoir :

$$\begin{aligned} \forall (P, Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}_3[X]^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P, \alpha Q_1 + Q_2) &= \sum_{k=0}^3 P(k) \underbrace{(\alpha Q_1(k) + Q_2(k))}_{\alpha P(k)Q_1(k) + P(k)Q_2(k)} \\ &= \alpha \sum_{k=0}^3 P(k)Q_1(k) + \sum_{k=0}^3 P(k)Q_2(k) = \alpha \varphi(P, Q_1) + \varphi(P, Q_2) \end{aligned}$$

On peut distribuer les sommes puisqu'il s'agit de somme finie.

(4) On vérifie que, pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P, P) = \sum_{k=0}^3 P(k)^2 \geq 0$ (somme de réels positifs)

(5) On vérifie que, pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$: $\varphi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0$

Or : $\varphi(P, P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^3 P(k)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, P(k)^2 = 0 \Leftrightarrow P$ admet pour racines les réels 0, 1, 2 et 3 (somme nulle de nombres positifs)

Le polynôme P admet donc 4 racines distinctes or $\deg(P) \leq 3$ donc P est forcément le polynôme nul.

b. Vérifier que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.

Pour $(p, q) \in \llbracket 0, 3 \rrbracket^2$, on a : $\varphi(L_p, L_q) = \sum_{k=0}^3 L_p(k) L_q(k) = L_p(p) L_q(p)$ car $L_p(k) = 0$ si $k \neq p$ aussi $\varphi(L_p, L_q) = 1 \times L_q(p)$
 Dés lors : $\varphi(L_p, L_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq p \\ 1 & \text{si } q = p \end{cases}$ et la famille (L_0, L_1, L_2, L_3) est orthonormale.

Mais, une famille orthogonale (et donc à fortiori orthonormale) est une famille libre aussi (L_0, L_1, L_2, L_3) est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ avec $\text{Card}(L_0, L_1, L_2, L_3) = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$ aussi (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

Finalement : (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$

c. Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Exprimer en fonction de Q , les coordonnées de Q dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3)

Méthode 1 Puisque la base (L_0, L_1, L_2, L_3) est orthonormée, les coordonnées de Q sont $(\varphi(Q, L_0), \varphi(Q, L_1), \varphi(Q, L_2), \varphi(Q, L_3))$ d'après le cours.

Mais, pour $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$: $\varphi(Q, L_p) = \sum_{k=0}^3 Q(k) L_p(k) = Q(p) L_p(p) = Q(p) \times 1 = Q(p)$ avec $Q1c$

Finalement, les coordonnées de Q dans (L_0, L_1, L_2, L_3) sont $(Q(0), Q(1), Q(2), Q(3))$

Méthode 2 On sait que : $\exists! (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$, $Q(X) = x_0 L_0(X) + x_1 L_1(X) + x_2 L_2(X) + x_3 L_3(X)$

En évaluant pour $X = 0$, on a : $Q(0) = x_0 \times 1 + x_1 \times 0 + x_2 \times 0 + x_3 \times 0 = x_0$

En évaluant pour $X = 1$, on a $Q(1) = x_1$ En évaluant pour $X = 2$ et $X = 3$, on a $Q(2) = x_2$ et $Q(3) = x_3$

Les coordonnées de Q dans (L_0, L_1, L_2, L_3) sont $(Q(0), Q(1), Q(2), Q(3))$

3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire φ

On sait que $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$ aussi on utilise le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée (Q_1, Q_2) à partir de $(1, X)$.

On sait que $Q_1 = \frac{1}{\|1\|}$ or $\|1\| = \sqrt{\varphi(1, 1)} = \sqrt{1+1+1+1} = 2$ soit $Q_1 = \frac{1}{2}$

Ensuite : $Q_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|}$ où $U_2 = X - \varphi(X, Q_1) Q_1 = X - \frac{1}{4} \varphi(X, 1) 1 = X - \frac{1}{4} (0+1+2+3) = X - \frac{3}{2}$

et $\|U_2\|^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{9}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 2 \times \frac{10}{4} = 5$ d'où $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(X - \frac{3}{2}\right)$

Une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ est (Q_1, Q_2) où $Q_1 = \frac{1}{2}$ et $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(X - \frac{3}{2}\right)$

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

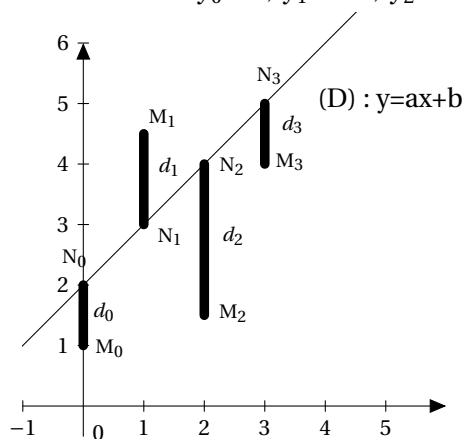
On considère désormais 6 réels a, b, y_0, y_1, y_2 et y_3 et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$.

Pour tout $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on note M_p le point de coordonnées (p, y_p) , N_p le point de $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est p et d_p la longueur du segment $[M_p N_p]$.

On pose alors $\delta(a, b) = \sum_{p=0}^3 d_p^2$

L'objectif est de déterminer les valeurs a et b (si elles existent) pour lesquelles $\delta(a, b)$ est minimale.

Voici un schéma qui illustre les données précédentes avec $y_0 = 1, y_1 = 4.5, y_2 = 1.5, y_3 = 4$ et $a = 1$ et $b = 2$



4. Vérifier que $\delta(a, b) = \sum_{p=0}^3 (y_p - ap - b)^2$

On sait que, pour $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, M_p a pour coordonnées (p, y_p) et N_p a pour coordonnées $(p, ap + b)$ (puisque sur $\mathcal{D}$)

Alors : $d_p^2 = (p - p)^2 + (y_p - (ap + b))^2 = (y_p - ap - b)^2$ et, par suite : $\delta(a, b) = \sum_{p=0}^3 d_p^2 = \sum_{p=0}^3 (y_p - ap - b)^2$

5. a. Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3 .

On pourra utiliser les polynômes L_p pour $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$

Le polynôme $Q = y_0 L_0 + y_1 L_1 + y_2 L_2 + y_3 L_3$ vérifie $\forall k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, Q(k) = y_k$ donc son graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3 . (Il y a bien existence)

Prouvons l'unicité : si Q_1 et Q_2 répondent tous les deux au problème alors $Q_1 - Q_2$ admet pour racine les 4 réels distincts 0, 1, 2 et 3 or $Q_1 - Q_2$ est un polynôme de degré inférieur à 3 aussi $Q_1 - Q_2$ est forcément nul soit $Q_1 = Q_2$ (Il y a bien unicité)

- b. Démontrer que $\delta(a, b) = \|Q - H\|^2$ où $H(X) = aX + b$

On sait que : $\forall p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket, Q(p) = y_p$ et $H(p) = ap + b$ d'où $(Q - H)(p) = y_p - ap - b$

De sorte que : $\|Q - H\|^2 = \sum_{p=0}^3 (Q - H)(p)^2 = \sum_{p=0}^3 (y_p - ap - b)^2 = \delta(a, b)$ d'après 5

- c. En évoquant la distance d'un vecteur à un espace vectoriel bien choisi, en déduire l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0 . On précisera le lien entre Q et H_0

On cherche à calculer $\inf \{ \delta(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \} = \inf \{ \|Q - H\|^2 \mid H \in \mathbb{R}_1[X] \} = d(Q, \mathbb{R}_1[X])^2$ Or, on sait, d'après le cours, que cette borne inférieure est atteinte lorsque $H = H_0$ avec H_0 le projeté orthogonal de Q sur $\mathbb{R}_1[X]$

Dans la suite du sujet, on pose $\bar{Y} = \sum_{p=0}^3 y_p$ et $\overline{XY} = \sum_{p=0}^3 p y_p$

6. a. Exprimer H_0 en fonction de φ, Q et les polynômes obtenus dans la question 3.

En utilisant la base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ de la question 3, on sait que : $H_0 = \varphi(Q, Q_1)Q_1 + \varphi(Q, Q_2)Q_2$

- b. Déterminer H_0 en fonction de $\bar{Y}$ et $\overline{XY}$

$\varphi(Q, Q_1) = \frac{1}{2} \varphi(Q, 1) = \frac{1}{2} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = \frac{1}{2} \bar{Y}$ et

$\varphi(Q, Q_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi(Q, X - \frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi(Q, X) - \frac{3}{2} \varphi(Q, 1)) = \frac{1}{\sqrt{5}} (0 \times y_0 + 1 \times y_1 + 2 \times y_2 + 3 \times y_3 - \frac{3}{2} \bar{Y}) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\overline{XY} - \frac{3}{2} \bar{Y})$

Finalement : $H_0 = \frac{1}{4} \bar{Y} + \frac{1}{5} (\overline{XY} - \frac{3}{2} \bar{Y}) (X - \frac{3}{2})$

Bilan Global : Deux copies excellentes performant au delà de 17 (17 et 17,4) creusant un écart significatif sur un groupe de 44 bonnes copies autours de 14 (entre 19,9 et 14,6). On trouve ensuite 5 copies qui performant un peu au dessus de la moyenne d'épreuve (entre 10,1 et 11,6) On trouve ensuite 5 copies à la moyenne d'épreuve ou légèrement en dessous (entre 8 et 9,1) qui limitent la casse. Les copies restantes réalisent des contre-performances : 3 copies faibles sont autour de 7 (entre 6,8 et 7,2) puis 5 copies très faibles autours de 5 (entre 5,5 et ,2) et 3 copies clairement insuffisantes autours de 3 (entre 2,6 et 3,4)

Exercice d'Analyse

1. Très décevant alors que c'est une question qui a été traité en TD

Des grosses erreurs dans le vocabulaire qui risquent d'être lourdement pénalisées à l'écrit :

une fonction f est intégrable sur I mais une intégrale $\int_I f(t) dt$ converge (absolument)

Lorsque vous écrivez « $|f(t)|$ converge en $+\infty$ », vous dites « $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(t)|$ existe » ce qui n'est pas la même chose que l'intégrabilité de f en $+\infty$...

Je rappelle que l'intégrabilité de f revient à prouver la convergence absolue de l'intégrale autrement dit il faut établir :

la continuité de f sur I et la convergence de $\int_I |f(t)| dt$

Bien souvent, vous avez annoncé une singularité en 0 alors que la fonction f_n est continue en 0...

En $+\infty$, la majoration $|f_n(t)| \leq e^{-nt}$ issue de la majoration usuelle $|\sin t| \leq 1$ permettait de conclure à l'aide de l'intégrale de référence $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$

Pour le calcul, on peut utiliser un passage en complexe (voir corrigé) ou bien une double IPP (plus long) :

$$\begin{cases} u'(t) = \sin t \\ v(t) = e^{-nt} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} u(t) = -\cos t \\ v'(t) = -ne^{-nt} \end{cases} \text{ où } u \text{ et } v \text{ sont } C^1 \text{ sur } [0, +i i[$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} u'(t) v(t) dt \text{ converge et } [u(t) v(t)]_0^{+\infty} = [-\cos(t) e^{-nt}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) \text{ (cos borné en } +\infty \text{ et } n > 0)$$

$$\text{Aussi : } \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-nt} dt = 1 - \int_0^{+\infty} u(t) v'(t) dt = 1 - n \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-nt} dt \text{ est possible (2 termes sur 3 convergent)}$$

$$\begin{cases} u_1'(t) = \cos t \\ v_1(t) = e^{-nt} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} u_1(t) = \sin t \\ v_1'(t) = -ne^{-nt} \end{cases} \text{ où } u_1 \text{ et } v_1 \text{ sont } C^1 \text{ sur } [0, +i i[$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} u_1'(t) v_1(t) dt \text{ converge et } [u_1(t) v_1(t)]_0^{+\infty} = [\sin(t) e^{-nt}]_0^{+\infty} = 0 - 0 \text{ (sin borné en } +i i \text{ et } n > 0)$$

$$\text{Aussi : } \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-nt} dt = 1 - n \left(0 - \int_0^{+\infty} u_1(t) v_1'(t) dt \right) = 1 - n \left(0 + n \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-nt} dt \right) = 1 - n^2 \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-nt} dt$$

$$\text{qui permet d'obtenir en réordonnant : } (1 + n^2) \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-nt} dt = 1 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-nt} dt = \frac{1}{1 + n^2}$$

2. Grand classique : En général, vous avez l'argument de continuité et le prolongement par continuité en 0 (Mis à part quelques horreurs vues sur les équivalents usuels $\sin(t) \sim_0 t$ et $e^t - 1 \sim_0 t$...)

Dans le même genre, $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ **n'est pas une intégrale de Riemann!** Les intégrales de Riemann sont du type $\int \frac{dt}{t^\alpha}$ avec

soit un singularité en 0 soit en $+\infty$ ou éventuellement $\int_a \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ pour un singularité en a ...

Vos arguments pour la singularité en $+\infty$ sont plus confus :

- vous écrivez souvent $\left| \frac{\sin t}{e^t - 1} \right| \leq \frac{1}{e^t - 1} \sim_{+\infty} \frac{1}{e^t}$ alors qu'il serait préférable d'écrire $\left| \frac{\sin t}{e^t - 1} \right| \leq \frac{1}{e^t - 1}$ et $\frac{1}{e^t - 1} \sim_{+\infty} \frac{1}{e^t}$ car vous

utilisez d'abord un critère d'équivalence pour obtenir l'intégrabilité de $\left[t \mapsto \frac{1}{e^t - 1} \right]$ en utilisant l'intégrale de référence

$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ puis un théorème de majoration pour obtenir l'intégrabilité de votre fonction

- on pouvait n'utiliser qu'un critère d'équivalence en comparant avec la fonction f_1 (voir corrigé)

3. Là encore, une question traitée à de nombreuses reprises en TD où il faut reconnaître une série géométrique en précisant bien la raison q , en vérifiant le critère de convergence $|q| < 1$ et en utilisant la formule de la somme avec gestion du premier terme.

4. Il s'agit bien sûr d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Vous devez :

- identifier clairement la fonction S , les fonctions f_n et l'intervalle I
- énoncer clairement le théorème où on doit distinguer le lien logique (Si...alors... ou bien $\Rightarrow$), les 3 hypothèses et les 2 conclusions
- vérifier la validité des hypothèses (en utilisant éventuellement les questions précédentes)
- conclure à l'aide des conclusions du théorème et des calculs précédents

Problème d'Analyse

1. a. C'est souvent très incomplet...Voici (en souligné) les arguments qu'on doit retrouver dans votre rédaction :

- l'argument $t > 0$ sur $]1, +\infty[$ assure la définition, la continuité de $[t \mapsto t^x] = [t \mapsto e^{x \ln t}]$

Lorsque x est un réel quelconque, t^x n'est définie que pour $t > 0$. C'est différent pour t^n où $n \in \mathbb{N}^*$ défini sur $\mathbb{R}$ par : $t^n = t \times t \times \dots \times t$

- l'argument $t^2 - 1 \geq 0$ sur $]1, +\infty[$ assure la définition et la continuité de $[t \mapsto \sqrt{t^2 - 1}]$ par composition

Attention, il faut un argument de continuité et pas seulement la définition de l'intégrande!

- l'argument $t^2 - 1 \neq 0$ et $t^x \neq 0$ assure la continuité de g_x par quotient

- ces fonctions sont positives de par leur définition (exponentielle et racine carrée).

- b. Il faut mettre en avant les hypothèses du théorème de la bijection :

continue et strictement monotone sur un intervalle.

Toute référence à la positivité est hors sujet pour établir la bijectivité : le correcteur doute alors de la connaissance exacte du théorème de la bijection par le candidat

Il fallait aussi établir que l'image de $]0, \ln(2 + \sqrt{3})[$ est $]1, 2[$ par ch avec $\text{ch } 0 = 1$ et en vérifiant $\text{ch}(\ln(2 + \sqrt{3})) = 2$

Le changement de variable $t = \text{ch } x$ n'était pas donné mais fortement suggéré par le sujet puisqu'on demandait explicitement de vérifier l'hypothèse de changement de variable (mais encore faut-il la connaître...)

On peut regretter, dans vos copies, que la question de la convergence des intégrales est totalement négligée : elle s'obtient par le théorème en étudiant la convergence de l'intégrale post-changement de variable. Le calcul de l'intégrable post- changement de variable s'appuie sur **les relations du cours $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ et $\text{sh } x > 0$ si $x > 0$** (voir corrigé) et il se trouve que celle-ci est bien convergente (elle n'est même plus généralisée).

- c. Très peu traitée : la question incite pourtant à utiliser la convergence établie en b) pour obtenir l'intégrabilité en 1 de g_x (d'où l'étude de $\int_1^2 g_x(t) dt$). Il s'agit donc d'étudier l'expression $g_x(t)$ lorsque t est proche de 1 : ce qui ne pose pas de difficulté si on utilise $t^x = e^{x \ln t}$. On peut alors repérer $t^x \sim_{t \rightarrow 1} 1$ et obtenir un équivalent (voir corrigé) ou bien utiliser

une majoration : $t \in]1, 2] \Rightarrow \ln(t) > 0$ et $x > 0$ d'où $x \ln t > 0 \Rightarrow t^x > 1 \Rightarrow \frac{1}{t^x} < 1 \Rightarrow g_x(t) < \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$ car $\sqrt{t^2 - 1} > 0$

Que vous utilisiez le critère d'équivalence (comme dans la correction) ou le théorème de majoration, **l'hypothèse de signe $g_x(t) > 0$ est nécessaire** (et elle a été adroitement prouvée en question 1). Attention aussi aux HORREURS du style :

• $\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$ n'a pas pour primitive $\text{Arccos } t$ ou $\text{Arcsin } t$ car $\text{Arcsin}'(t) = -\text{Arccos}'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$ pour $t \in]-1, 1[$

• « $\int_1^2 f g$ converge car $\int_1^2 f$ et $\int_1^2 g$ convergent » est une énormité comme le souligne le contre-exemple :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \text{ converge mais } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{dt}{t} \text{ diverge.}$$

- d. On étudie cette fois l'intégrabilité en $+\infty$: il s'agissait d'obtenir $g_x(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \times \frac{1}{t^x} = \frac{1}{t^{x+1}}$ et de conclure à nouveau avec le critère d'équivalence. **N'oubliez pas de mettre en avant l'hypothèse "signe constant" quand vous appliquez le critère d'équivalence.**

- e. Question traitée de façon incomplète en général : il s'agit de donner les réels x pour lesquels $f(x)$ existe et s'assurer qu'il n'y en a pas d'autres. Dire « Si $x > 0$ alors $f(x)$ CV » permet seulement de justifier $]0, +\infty[\subset D_f$

Il fallait aussi établir que $f(x)$ DV lorsque $x \leq 0$ où l'une des intégrales converge alors que l'autre diverge conduisant à l'intégrale $f(x)$ divergente

On pouvait aussi travailler par équivalence au vu de la définition de la convergence des intégrales du programme :

$$f(x) \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^2 g_x(t) dt \text{ et } \int_2^{+\infty} g_x(t) dt \text{ convergent (en même temps)} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

2. Cette fois le changement de variables $t = \text{ch } u$ est donné (et plus sous-entendu comme en 1b).

L'égalité des intégrales est vérifiée puisqu'on sait qu'elles sont convergentes aussi il fallait bien insister sur l'utilisation du résultat « $f(x)$ cv si $x > 0$ » prouvé en question 1.

Là encore, une forte pénalisation pour les candidats qui ne connaissent pas la relation $\text{ch}^2 u - \text{sh}^2 u = 1$.

Il s'agissait ensuite de calculs classiques de primitives largement suggérées par le sujet.

3. La positivité de f découle du résultat de positivité de l'intégrale sachant que g_x est positive d'après 1a.

Pour la monotonie : beaucoup d'argument bidon du style « f est décroissante donc $\int f$ est décroissante » totalement FAUX.

Il suffit de penser à $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ où $\ln$ croît alors que $[t \mapsto \frac{1}{t}]$ décroît!

En fait, beaucoup de confusions/imprécisions sur le choix de la variable x ou t ... La décroissance de f , fonction de la variable x , s'entend donc selon la variable x et il s'agit donc de montrer que : $0 < x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Cela s'obtient facilement en comparant $g_x(t)$ et $g_y(t)$ à t fixé dans $]1, +\infty[$ puis en intégrant les inégalités sur $]1, +\infty[$ sans changer l'ordre à cause du théorème de croissance de l'intégrale (voir corrigé).

Le calcul de $f'(x)$ serait possible en utilisant les théorèmes d'intégrales à paramètre (voir plus tard dans l'année). Toutefois, vu le nombre d'hypothèses à vérifier pour l'utiliser, je doute que cela soit vraiment une bonne idée...

4. a. Assez bien traité en général sauf que vous ne justifiez pas, en général, l'utilisation de la linéarité de l'intégrale en pointant que 2 (au moins) des 3 intégrales convergent.

- b. Je donne deux démonstrations : soit en réalisant l'IPP sur $f(x) - f(x+2)$ soit en réalisant l'IPP sur $f(x+2)$

Attention à bien rédiger vos IPP en justifiant la convergence de 2 termes sur 3 ou en travaillant sur $[\epsilon, A] \subset]1, +\infty[$ puis en faisant $\epsilon \rightarrow 0$ et $A \rightarrow +\infty$.

5. a. Bien réussie quand elle a été abordée : il suffit d'utiliser la relation 4b.

- b. Des raisonnements bien compliqués avec des récurrences alors qu'il suffit de relier la question à la précédente : on veut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n f(n) f(n+1) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Phi(n) = \frac{\pi}{2}$ or on sait $\Phi(n+1) = \Phi(n)$ autrement dit que la suite $(\Phi(n))_{n \geq 1}$ est constante : $\forall n \in \mathbb{N}, \Phi(n) = \Phi(1) = f(1)f(2)$, valeurs calculées en Q2 justement.

- c. Il s'agit de démontrer d'abord que $f(n+1) \sim_{+\infty} f(n)$

Premier piège : Attention, bien sûr, à ne pas composer les équivalents!

$$n \sim_{+\infty} n+1 \text{ n'entraîne pas } f(n+1) \sim_{+\infty} f(n) \quad \text{Contre-ex : } \frac{e^{n+1}}{e^n} = e \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$$

Deuxième erreur : $u_n \sim v_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ (si elle existe)

Par contre, réciproque fautive dans les cas où la limite vaut 0 ou ∞ (Pb des formes indéterminées $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\text{Contre-ex : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \text{ mais } \frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \text{ mais } n \not\sim n^2$$

$$\text{Par contre : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \neq 0 \Rightarrow u_n \sim \ell \sim v_n \Rightarrow u_n \sim v_n \text{ par transitivité}$$

La question a dû également être classante :

il s'agissait d'exploiter la décroissance de f et la relation $f(n+2) = \frac{n}{n+2} f(n)$ pour encadrer $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ par deux suites qui tendent vers 1 (voir corrigé). On a alors l'équivalent $f(n)^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2n}$ avec 6b qu'on passe à la racine (élévation à une puissance autorisée) pour obtenir l'équivalent voulu.

6. Une question "technique" mais classique qui aurait sans doute servi de question classante sur les bonnes copies. On va retrouver ce raisonnement classique sur les séries entières.

Le sujet proposé est la presque totalité du second problème de l'épreuve mathématique A de l'année 2024. Nous disposons donc du rapport du concours dont je reprends (en italique) des extraits :

1. **a.** *Sauf exceptions, les candidats ont pris soin de détailler les étapes*
- b.** *Peu d'erreurs à l'exception des écritures incorrectes : $X \times -(X-2) \times -\frac{1}{2}(X-3)$ ou $X(X-1)(X-3) - \frac{1}{2}$*
Autrement dit, le jury attend des écritures simplifiées et lisibles des polynômes!
- c.** *Dans une question comme celle-ci, il est conseillé de faire figurer sur la copie au moins les premiers calculs puis d'abrèger.*
Il était important de repérer la distinction entre $L_p(k) = 0$ si $p \neq k$ et $L_p(p) = 1$ et ne pas conclure trop vite à $L_p(k) = 0$ pour tout p et k ...
2. **a.** *Une grande majorité des candidats savent qu'ils doivent démontrer que φ est bilinéaire (et non billinéaire), symétrique et définie-positive et démontrent correctement que φ est bilinéaire, symétrique et positive. Par contre, beaucoup oublient de justifier que φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (et non $\mathbb{R}_3[X]$ ou $\mathbb{R}_6[X]$). Quand au caractère non dégénéré (càd défini), il est peu justifié ou alors, on a des arguments tels que « un polynôme dont tous les coefficients sont nuls est nul », « un polynôme avec une infinité de racines est nul » et même « P^2 est continu et positif ». (autrement dit hors sujet pour le cas considéré)*
Les candidats qui signalent 4 racines oublient régulièrement de les mettre en évidence : on passe directement de « $\sum_{k=0}^3 P^2(k) = 0$ » à « un polynôme de degré 3 (on a rarement inférieur ou égal à) ayant 4 racines est nul ».
- b.** *Sur les 3 points qu'il fallait démontrer, il en manque très souvent un ou deux. Des confusions entre dim et card sont également notées.*
Dans la classe, certains lisent mal la question : on ne demande pas de construire une base orthonormée mais de vérifier qu'une famille donnée est une base orthonormée. Ici, utiliser Gram-Schmidt sur la base canonique est totalement inutile!
De plus, trop d'élèves ne connaissent pas la définition de l'orthogonalité d'une famille : il s'agit de vérifier que $\varphi(L_i, L_j) = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$...et pas de « comparer » la famille (L_0, L_1, L_2, L_3) à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ via des pseudo calculs $\varphi(L_i, X^i)$...
- c.** *Il s'agissait (presque) d'une question de cours. Elle a été peu traitée.*
En effet, on connaît l'expression des coordonnées d'un vecteur x dans une BON $(e_1, \dots, e_n)$: $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$!
Ici, dans ce contexte, on connaît donc les coordonnées de Q formant le quadruplet $(\varphi(Q, L_p))_{0 \leq p \leq 3}$
Ceux qui ont répondu se sont souvent limités à l'expression de Q en fonction des polynômes L_p - souvent sans exprimer $\varphi(Q, L_p)$ - et donc n'ont pas répondu complètement à la question qui demandait des coordonnées
Le jury souhaitait donc un calcul finalisé : $\varphi(Q, L_p) = \sum_{k=0}^3 Q(k) L_p(k) = Q(p) L_p(p) = Q(p) \times 1 = Q(p)$
Les candidats ayant essayé un changement de base sont rarement arrivés au résultat. et on perdu beaucoup de temps!
3. Cette fois, on demande de construire une base orthonormée pour le produit scalaire φ : on va donc orthonormaliser la base $(1, X)$ par le procédé d'orthonormalisation.
Le procédé d'orthogonalisation ou d'orthonormalisation de Gram-Schmidt semble peu connu des candidats et est souvent émaillé d'erreurs de calcul, tout particulièrement chez ceux qui norment les vecteurs au fur et à mesure. On a souvent trouvé (L_0, L_1) qui ne sont pas dans $\mathbb{R}_1[X]$ ou $(-X, X-1)$ par une construction similaire aux L_p sans que les candidats se rendent compte qu'en procédant ainsi, ils changent de produit scalaire
La suite du problème consiste en une mise en situation concrète d'un calcul de distance via un problème dit d'interpolation. Il s'agissait de comprendre une situation graphique.
A noter que le schéma n'était pas donné dans le sujet initial : c'était au candidat de construire un exemple
4. Pour obtenir la relation, il suffisait de faire une lecture attentive des données du sujet...
Il y a eu beaucoup de $d_p = y_p - ap - b$, mais aussi $d_p = [M_p N_p]$ ou $d_p = \begin{pmatrix} x_M - x_N \\ y_M - y_N \end{pmatrix}$ et, sous entendu, pas beaucoup de
 $d_p = M_p N_p = \sqrt{(x_{N_p} - y_{M_p})^2 + (y_{N_p} - y_{M_p})^2}$ pour justifier correctement cette relation...

Le reste du problème n'a quasiment pas été abordé dans la classe.