

DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3h - La calculatrice n'est pas autorisée.

Attention, le sujet est RECTO-VERSO

*Le barème portera probablement sur 2/3 pour l'analyse et 1/3 pour l'algèbre
En analyse, l'exercice et le problème sont totalement indépendants*

Exercice d'Analyse

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que $f_n = [t \mapsto (\sin t)e^{-nt}]$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et justifier que $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{n^2 + 1}$
2. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt$
3. Prouver que, pour $t > 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{1}{e^t - 1}$
4. Démontrer alors que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ On rappelle que $|\sin t| \leq t$ pour $t > 0$

Problème d'Analyse

Soit x un réel, on définit, lorsque cela est possible : $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x \sqrt{t^2 - 1}}$

1. Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, on introduit : $g_x = \left[t \mapsto \frac{1}{t^x \sqrt{t^2 - 1}} \right]$.
 - a. Justifier que g_x est continue et positive sur $]1, +\infty[$
 - b. Montrer que la fonction ch réalise une bijection de $]0, \ln(2 + \sqrt{3})[$ dans $]1, 2[$.
En déduire que $\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$ converge et préciser sa valeur.
 - c. En déduire que $\int_1^2 g_x(t) dt$ est convergente pour tout x réel.
 - d. Démontrer que $\int_2^{+\infty} g_x(t) dt$ converge si et seulement si $x > 0$.
 - e. En déduire le domaine de définition I de f c'est à dire les valeurs du réel x telles que $f(x)$ existe.
2. En posant $t = \text{ch } u$, calculer $f(1)$ et $f(2)$.
(On pourra remarquer que $\frac{1}{\text{ch } x} = \frac{2e^x}{1 + (e^x)^2}$ et que la dérivée de $x \mapsto \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$ est $x \mapsto \frac{1}{\text{ch}^2 x}$)
3. Vérifier que f est positive et décroissante sur I .
4. Soit $x \in I$.
 - a. Démontrer que : $f(x) - f(x+2) = \int_1^{+\infty} t^{-x-2} \sqrt{t^2 - 1} dt$
 - b. Démontrer la relation : $f(x+2) = \frac{x}{x+1} f(x)$. On pourra réaliser une intégration par parties.
5. a. Pour x réel strictement positif, on pose : $\Phi(x) = x f(x) f(x+1)$. Prouver que : $\Phi(x+1) = \Phi(x)$.
b. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) f(n+1) = \frac{\pi}{2n}$.
c. En déduire que : $f(n) \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
6. **Ne traiter cette question que si tout le reste a été traité**
Donner l'expression de $f(2p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et de $f(2p+1)$ pour $p \in \mathbb{N}$ à l'aide de factorielle.

Pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieur ou égal à n .

Soit φ , l'application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2, \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^3 P(k)Q(k)$

On considère également les polynômes $L_p(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^3 \frac{x-k}{p-k}$ pour $p \in \{0; 1; 2; 3\}$

1. **a.** Vérifier que $L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)$
- b.** Ecrire de même $L_1(X)$, $L_2(X)$ et $L_3(X)$
- c.** Déterminer les valeurs $L_p(k)$ pour tout $(p, k) \in \llbracket 0, 3 \rrbracket^2$
2. **a.** Démontrer que φ est un produit scalaire du $\mathbb{R}_3[X]$. On notera $\| \cdot \|$ la norme associée.
- b.** Vérifier que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.
- c.** Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Exprimer en fonction de Q , les coordonnées de Q dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3)
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire φ

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

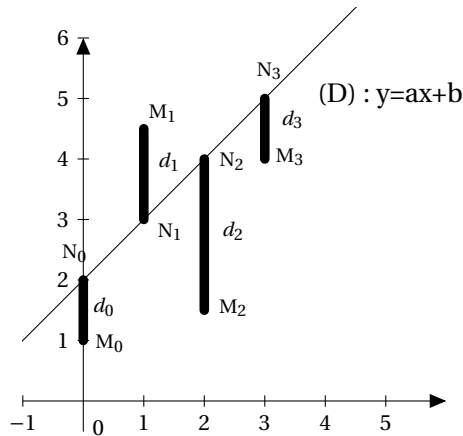
On considère désormais 6 réels a, b, y_0, y_1, y_2 et y_3 et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$.

Pour tout $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on note M_p le point de coordonnées (p, y_p) , N_p le point de $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est p et d_p la longueur du segment $[M_p N_p]$.

On pose alors $\delta(a, b) = \sum_{p=0}^3 d_p^2$

L'objectif est de déterminer les valeurs a et b (si elles existent) pour lesquelles $\delta(a, b)$ est minimale.

Voici un schéma qui illustre les données précédentes avec $y_0 = 1, y_1 = 4.5, y_2 = 1.5, y_3 = 4$ et $a = 1$ et $b = 2$



4. Vérifier que $\delta(a, b) = \sum_{p=0}^3 (y_p - ap - b)^2$
5. **a.** Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3 .
On pourra utiliser les polynômes L_p pour $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$
- b.** Démontrer que $\delta(a, b) = \|Q - H\|^2$ où $H(X) = aX + b$
- c.** En évoquant la distance d'un vecteur à un espace vectoriel bien choisi, en déduire l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0 . On précisera le lien entre Q et H_0

Dans la suite du sujet, on pose $\bar{Y} = \sum_{p=0}^3 y_p$ et $\overline{XY} = \sum_{p=0}^3 p y_p$

6. **a.** Exprimer H_0 en fonction de φ, Q et les polynômes obtenus dans la question 3.
- b.** Déterminer H_0 en fonction de $\bar{Y}$ et $\overline{XY}$