

Deuxième exercice

Dans cet exercice, l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les fonctions

• r_0 définie sur $I_0 = [0, 2\pi]$ par $\forall t \in I_0, r_0(t) = R$ où $R > 0$

• r_1 définie sur $I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\forall t \in I_1, r_1(t) = \cos t$

• r_2 définie sur $I_2 = \mathbb{R}$ par $\forall t \in I_2, r_2(t) = e^t$

• r_3 définie sur $I_3 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\forall t \in I_3, r_3(t) = \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$

Enfin r_4 désigne une fonction de classe C^1 sur $I_4 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $n \in \llbracket 0; 4 \rrbracket$, on note

• Λ_n la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x(t) = r_n(t) \cos(t) \\ y(t) = r_n(t) \sin(t) \end{cases}, t \in I_n;$

• $M_n(t)$ le point de Λ_n de paramètre t pour $t \in I_n$.

Les différentes parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

1. Quelle est la nature de Λ_0 ? Préciser ses éléments caractéristiques.

On a $\Lambda_0 : \begin{cases} x_0(t) = R \cos(t) \\ y_0(t) = R \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ où on reconnaît la représentation paramétrique du cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon R

2. Démontrer que Λ_1 est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

On a : $\Lambda_1 : \begin{cases} x_1(t) = \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \\ y_1(t) = \cos(t) \sin(t) = \frac{\sin(2t)}{2} \end{cases}, t \in I_1 \Leftrightarrow_{s=2t} \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(s) \\ y = 0 + \frac{1}{2} \sin(s) \end{cases}, s \in [-\pi, \pi]$

Là encore, on identifie le paramétrage d'un cercle de centre le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$

Partie B

1. Calculer la longueur de la courbe Λ_2 entre les points $M_2(-\ln 3)$ et $M_2(3 \ln 2)$

x_2 et y_2 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec : $x'_2(t) = e^t \cos(t) - e^t \sin(t)$ et $y'_2(t) = e^t \sin(t) + e^t \cos(t)$

D'après le cours, la longueur cherchée est $\ell = \int_{-\ln 3}^{3 \ln 2} \sqrt{x'_2(t)^2 + y'_2(t)^2} dt$

Or : $x'_2(t)^2 + y'_2(t)^2 = e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\cos t + \sin t)^2 = e^{2t}(2 \cos^2 t + 2 \sin^2 t) = e^{2t} \times 2$ car $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Ainsi, puisque $\sqrt{e^{2t}} = |e^t| = e^t$: $\ell = \int_{-\ln 3}^{3 \ln 2} e^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} [e^t]_{-\ln 3}^{3 \ln 2} = \sqrt{2} (e^{\ln 8} - e^{-\ln 3}) = \sqrt{2} \left(8 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{2} \times \frac{23}{3}$ u.l.

2. La courbe Λ_2 est-elle de longueur finie?

Notons $\ell(t)$ la longueur de la courbe entre les points $M_2(0)$ et $M_2(t)$ alors : $\ell(t) = \left| \int_0^t e^s \sqrt{2} ds \right| = \sqrt{2} |e^t - 1|$

Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $\ell(t) = \sqrt{2}(e^t - 1) = \sqrt{2}e^t + o(e^t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$

Si la courbe était de longueur finie L alors $L \geq \ell(t)$ et il y a une contradiction puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ell(t) = +\infty$

3. Démontrer que tous les points $M_2(t)$ pour lesquels la tangente à Λ_2 est verticale sont alignés. On précisera un point et un vecteur directeur de la droite qui les contient.

Lorsque la tangente en $M_2(t)$ à Λ_2 est verticale, alors $x'_2(t) = 0$ (que le point soit régulier ou non)

$x'_2(t) = 0 \Leftrightarrow e^t(\cos t - \sin t) = 0 \Leftrightarrow_{e^t \neq 0} \cos t = \sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{2} - t \pmod{2\pi}$ ou $t \equiv t - \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$
 $\Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$ ou $0 \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \Leftrightarrow t \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$
 Pas de solutions

Posons $t_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ pour nommer les différents paramètres concernés. Alors :

$x_2(t_k) = e^{t_k} \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k e^{t_k} \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y_2(t_k) = e^{t_k} \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = (-1)^k e^{t_k} \frac{\sqrt{2}}{2}$

On constate que $x(t_k) = y(t_k)$ autrement dit les points $M(t_k)$ sont tous sur la droite d'équation $y = x$ qui passe par l'origine O et qui est dirigée par le vecteur $\vec{i} + \vec{j} = (1, 1)$

4. Soit $M_2(t)$ un point de Λ_2 . Donner le repère de Frenet puis la courbure de Λ_2 au point $M_2(t)$

$$\text{Soit } s'(t) = \left\| \frac{d\vec{OM}_2}{dt} \right\| = \sqrt{x_2'(t)^2 + y_2'(t)^2} = \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2}e^t \quad \text{d'après B-2}$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M_2(t)$ est régulier puisque $s'(t) \neq 0$ et donc on peut définir la base de Frenet.

$$\text{Le premier vecteur de la base de Frenet est } \vec{T} = \frac{1}{s'(t)} \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix} = \vec{T}$$

$$\text{Le second vecteur de la base de Frenet est directement orthogonal à } \vec{T} \text{ d'où : } \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

Le repère de Frenet est alors $(M_2(t); \vec{T}, \vec{N})$

$$\text{Méthode 1 On peut calculer la courbure à l'aide des formules de Frenet : } \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N} \Leftrightarrow \frac{1}{s'(t)} \frac{d\vec{T}}{dt} = \gamma \vec{N}$$

$$\text{En comparant les abscisses, on a : } \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \times \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos t - \sin t) = \gamma \times \frac{1}{\sqrt{2}} (-\cos t - \sin t) \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t}$$

$$\text{Méthode 2 On utilise le théorème de relèvement : si } \vec{T} = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) \end{pmatrix} \text{ alors } \gamma = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t = \cos \frac{\pi}{4} \cos t - \sin \frac{\pi}{4} \sin t = \cos \left(\frac{\pi}{4} + t \right) \quad \text{et : } \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t = \cos \frac{\pi}{4} \sin t + \sin \frac{\pi}{4} \cos t = \sin \left(\frac{\pi}{4} + t \right)$$

$$\text{donc } \alpha(t) = \frac{\pi}{4} + t \text{ convient et, par suite : } \gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{s'(t)} \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \times 1$$

5. Déterminer une représentation paramétrique de la développée C_2 de Λ_2

Par définition, la développée est la courbe décrite par les centres de courbures de Λ_2

Le centre de courbure $C_2(t)$ de Λ_2 associé à $M_2(t)$ a pour coordonnées :

$$\vec{OC_2(t)} = \vec{OM_2(t)} + \frac{1}{\gamma} \vec{N} = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} + \sqrt{2} e^t \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix}$$

$$\text{La développée est donc la courbe paramétrée } C_2 : \begin{cases} x = -e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

6. Démontrer que C_2 est l'image de Λ_2 par une rotation donc on précisera le centre et l'angle.

On pourra s'intéresser aux affixes complexes des différents points considérés.

$$\text{L'axe de } M_2(t) \text{ est le complexe } z_2(t) = x_2(t) + i y_2(t) = e^t e^{it} = e^t (\cos t + i \sin t)$$

L'axe de $C_2(t)$, le centre de courbure de Λ_2 associé à $M_2(t)$ a pour affixe :

$$-e^t \sin t + i e^t \cos t = i e^t (\cos t + i \sin t) = i z_2(t) = e^{i \frac{\pi}{2}} z_2(t)$$

On peut alors conclure que $C_2(t)$ est l'image de $M_2(t)$ par la rotation plane de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$\text{Ainsi, } C_2 \text{ est l'image de } \Lambda_2 \text{ par la rotation plane de centre O et d'angle } \frac{\pi}{2}$$

Partie C

1. Justifier que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Λ_3 à $I'_3 = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Préciser comment obtenir la courbe Λ_3 en entier.

$$\text{Pour } t \in I_3, r_3(t) \text{ existe et on a : } x_3(t) = \sin^2 t \quad \text{et} \quad y_3(t) = \frac{\sin^3(t)}{\cos(t)} \quad \text{Exploisons la parité puisque } I_3 \text{ est centré en 0 :}$$

$$x_3(-t) = x_3(t) \text{ (à cause du carré) et } y_3(t) = -y_3(-t) \text{ (cosinus pair, sinus impair et présence du cube)}$$

ainsi $M_3(-t)$ est l'image de $M_3(t)$ par la symétrie d'axe O + Vect($\vec{\tau}$)

Il suffit donc d'étudier Λ_3 sur $I'_3 = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis de réaliser une symétrie d'axe O + Vect($\vec{\tau}$) pour obtenir la totalité du tracé de Λ_3 sur I_3

2. Déterminer les tableaux de variations des fonctions x_3 et y_3 sur I'_3 . Préciser les valeurs et/ou les limites au bord.

Par les théorèmes usuels (produit et quotient), x_3 et y_3 sont C^1 sur I'_3 vu que $\cos t \neq 0$ sur I'_3 avec :

$$x_3'(t) = 2 \sin(t) \cos(t) \quad \text{or } \cos t > 0 \text{ sur } I'_3 \text{ donc } x_3'(t) \text{ a le signe et les zéros de } \sin t \text{ soit : } x_3'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ et } x_3'(t) \geq 0$$

$$y_3'(t) = \frac{3 \cos^2(t) \sin^2(t) - (-\sin t) \sin^3(t)}{\cos^2(t)} = \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)} (3 \cos^2(t) + \sin^2(t)) \quad \text{or, sur } I'_3, \cos^2(t) > 0 \text{ et } \underbrace{3 \cos^2(t)}_{>0} + \underbrace{\sin^2(t)}_{\geq 0} > 0 \text{ donc}$$

$$y_3'(t) \text{ a le signe et les zéros de } \sin^2(t) \text{ d'où : } y_3'(t) \geq 0 \text{ et } y_3'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

En $t = 0$, on évalue : $x_3(0) = 0 = y_3(0)$

En $t = \frac{\pi}{2}$, on passe à la limite sachant que

$$\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin t = 1 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos t = 0^+$$

on obtient, par les limites usuels (produit, quotient) :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x_3(t) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} y_3(t) = +\infty$$

t	0	$\pi/2$
$x'_3(t)$	0	+
x_3	0	1
$y'_3(t)$	0	+
y_3	0	$+\infty$

3. Quelle est la nature du point $M_3(0)$? Préciser la tangente en ce point.

Le point $M_3(0)$ est stationnaire (car $x'_3(0) = 0 = y'_3(0)$) aussi, pour étudier sa nature, on utilise un développement limité vectoriel : $x_3(t) = \sin^2 t \sim_0 t^2$ aussi $x_3(t) = t^2 + o(t^2)$ et, par parité de x_3 , on a aussi : $x_3(t) = t^2 + o(t^3)$

$$y_3(t) = \frac{\sin^3 t}{\cos t} \sim_0 \frac{t^3}{1} \sim_0 t^3 \text{ aussi } y_3(t) = t^3 + o(t^3) \text{ alors : } \begin{pmatrix} x_3(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}$$

La première dérivée non nulle est pour $p = 2$ et la tangente en $M_3(0)$ est dirigée par $\vec{t}$ donc elle est horizontale.

La dérivée suivante non colinéaire est pour $q = 3$ aussi le point $M_3(0)$ est un point de rebroussement de première espèce

4. Donner les coordonnées du point $M_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ainsi que celle d'un vecteur directeur de la tangente à Λ_3 en ce point.

$$\text{Le point } M_3\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ est régulier de coordonnées } \left(x_3\left(\frac{\pi}{4}\right), y_3\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ car } \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{La tangente en } M_3\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ est dirigée par le vecteur } \begin{pmatrix} x'_3(\pi/4) \\ y'_3(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5. Etudier la branche infinie lorsque t tend vers $\frac{\pi}{2}$

D'après les limites déterminées en Q2, on peut affirmer que cette branche infinie est une asymptote vectricale d'équation $x = 1$ (la courbe étant située en haut à gauche à proximité de l'asymptote)

6. Tracer la courbe Λ_3 sur la feuille de papier millimétré fournie avec le sujet. On y fera apparaître les éléments déterminés dans les questions précédentes. Unité : 8 cm

Partie D

On considère les deux fonctions h et k définies sur I_4 par : $\forall t \in I_4$

$$h(t) = t^2(1 + \tan^2(t)) \quad \text{et} \quad k(t) = \tan(t) + t(1 + \tan^2(t))$$

Ainsi que la famille de droites $(D_t)_{t \in I_4}$ d'équation cartésienne : $k(t)x - y = h(t)$

1. Démontrer que $\forall t \in I_4$, $h'(t) = 2t(1 + \tan^2(t))(1 + t \tan(t))$ et $k'(t) = 2(1 + \tan^2(t))(1 + t \tan(t))$

La fonction tangente est de classe C^1 sur I_4 donc, par produit et somme de fonctions usuelles, les fonctions h et k sont de classe C^1 sur I_4 et on a :

$$h'(t) = 2t(1 + \tan^2(t)) + t^2 \times 2 \tan t \times (1 + \tan^2(t)) = (2t + 2t^2 \tan^2 t)(1 + \tan^2(t)) = 2t(1 + \tan^2(t))(1 + t \tan(t))$$

$$k'(t) = (1 + \tan^2(t)) + (1 + \tan^2(t)) + t \times 2 \tan t \times (1 + \tan^2(t)) = (1 + 1 + 2t \tan t)(1 + \tan^2(t)) = 2(1 + t \tan t)(1 + \tan^2(t))$$

2. Soit $t \in I_4$. Déterminer l'intersection de la droite D_t avec l'axe des ordonnées ainsi qu'un vecteur directeur de la droite D_t puis en déduire une représentation paramétrique de la droite D_t

$$M(x, y) \in D_t \cap (Oy) \Leftrightarrow k(t)x - y = h(t) \text{ et } x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -h(t) \end{cases}$$

Le point d'intersection de la droite D_t avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $A(t) = (0, -h(t))$

$$\text{La droite } D_t \text{ qui a pour équation } k(t)x - y = h(t) \text{ admet pour vecteur directeur } \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ k(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi : } D_t = A(t) + \text{Vect}(\vec{u}(t)) \text{ a pour représentation paramétrique } D_t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -h(t) + \lambda k(t) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Déterminer une représentation paramétrique de l'enveloppe C_4 de la famille de droites $(D_t)_{t \in I_4}$

On cherche un paramétrage régulier $[t \mapsto P(t)]$ de l'enveloppe C_4 de la famille de droites $(D_t)_{t \in I_4}$ tel que D_t est la tangente à C_4 en $P(t)$ autrement dit

1) $P(t) \in D_t$ et donc $\exists \lambda(t) \in \mathbb{R}, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda(t) \vec{u}(t)$

2) Les vecteurs $\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$ et $\vec{u}(t)$ sont colinéaires car ils dirigent tous les deux D_t donc $\det\left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}, \vec{u}(t)\right) = 0$

$$\det\left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}, \vec{u}(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + \lambda'(t) \vec{u}(t) + \lambda(t) \vec{u}'(t), \vec{u}(t)\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}, \vec{u}(t)\right) + 0 + \lambda(t) \det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = 0$$

Or : $\det\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}, \vec{u}(t)\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -h'(t) & k(t) \end{vmatrix} = h'(t)$ et : $\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ k'(t) & k(t) \end{vmatrix} = -k'(t)$

Or : $k'(t) = \underbrace{2(1 + \tan^2(t))}_{>0} (1 + t \tan(t))$ a le signe de $1 + t \tan(t)$ sur I_4 mais, sur I_4 , $\tan(t)$ a le signe de t donc $t \tan(t) \geq 0$ et

par suite $1 + t \tan(t) > 0$. Ainsi, on peut donc affirmer que $k'(t) > 0$ et donc $k'(t)$ ne s'annule pas.

On peut ainsi calculer : $\lambda(t) = -\frac{\det\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}, \vec{u}(t)\right)}{\det(\vec{u}'(t), \vec{u}(t))} = -\frac{h'(t)}{-k'(t)} = \frac{2t(1 + \tan^2(t))(1 + t \tan(t))}{2(1 + \tan^2(t))(1 + t \tan(t))} = t$

Finalement : $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -h(t) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ k(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -h(t) + tk(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \tan(t) \end{pmatrix}$ vu que $\begin{cases} h(t) = t^2(1 + \tan^2(t)) \\ k(t) = \tan(t) + t(1 + \tan^2(t)) \end{cases}$

Une représentation paramétrique de C_4 est $C_4 : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \tan(t) \end{cases}, t \in I_4$

4. Existe-t-il une fonction r_4 telle que $C_4 = \Lambda_4$?

Analyse : Si r_4 existe, alors on a : $\forall t \in I_4, \begin{cases} t = x_4(t) = r_4(t) \cos(t) \\ t \tan(t) = y_4(t) = r_4(t) \sin(t) \end{cases} \Rightarrow r_4(t) = \frac{t}{\cos(t)}$ avec la première équation.
 $\cos(t) \neq 0$ pour $t \in I_4$

Synthèse : On pose $r_4(t) = \frac{t}{\cos(t)}$ pour $t \in I_4$ alors, par quotient avec $\cos(t) \neq 0$ pour $t \in I_4$, r_4 est bien C^1 sur I_4 et on a :

$\forall t \in I_4, x_4(t) = t$ et $y_4(t) = \frac{t}{\cos(t)} \times \sin(t) = t \tan(t)$ de sorte que $\Lambda_4 = C_4$

Il existe bien une fonction r_4 telle que $C_4 = \Lambda_4$ d'expression $r_4(t) = \frac{t}{\cos(t)}$ pour $t \in I_4$

Troisième exercice

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A :

L'objectif de cette partie est de déterminer toutes les matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$(\mathcal{E}_1) : M^2 - 2M = A \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre les trois équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$(E_1) : x^2 - 2x = 0 \quad (E_2) : x^2 - 2x = -1 \quad (E_3) : x^2 - 2x = 3$$

- $(E_1) : x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ a pour solution $\mathcal{S}_1 = \{0, 2\}$
- $(E_2) : x^2 - 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ a pour solution $\mathcal{S}_2 = \{1\}$
- $(E_3) : x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$ a pour solution $\mathcal{S}_3 = \{-1, 3\}$

2. a. Déterminer les valeurs propres de la matrice A .

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 2 & -3 \\ -3 & x+3 & -3 \\ -4 & 4 & x-3 \end{vmatrix} = c_1 - c_1 + c_2 + c_3(x-3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & x+3 & -3 \\ 1 & 4 & x-3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{I_2 - I_1 \\ I_3 - I_1}]{I_2 - I_2 - I_1} (x-3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix}$$

$$\text{On développe alors selon } C_1 : \chi_A(x) = (x-3) \times + \begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ 2 & x \end{vmatrix} = (x-3) \times (x+1)x \quad \text{ainsi} \quad \chi_A(x) = x(x+1)(x-3)$$

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ a pour spectre } \text{Sp}(A) = \{-1, 0, 3\}} \quad \text{Contrôle sécurité : } -1 + 0 + 3 = 2 = \text{tr}(A)$$

b. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples ce qui est une condition suffisante pour affirmer que A est diagonalisable

c. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$

On classera les coefficients de la diagonale de D par ordre croissant.

Puisque A est diagonalisable, on a : $E_{-1}(A) \oplus E_0(A) \oplus E_3(A) = \mathbb{R}^3$ où $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_3)$ est le sous-espace propre (sev propre) de A associé à la valeur propre λ . On obtient une base de diagonalisation en concaténant les bases de ces sev propres. Or, ces sev sont tous de dimension 1 (car valeur propre simple) donc il suffit de trouver un vecteur propre non nul de chacun des sev pour obtenir cette base.

On notera C_i la colonne i de la matrice avec laquelle on travaille.

$$E_{-1}(A) = \text{Ker}(A + I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \text{ alors : } C_1 - C_3 = 0 \Leftrightarrow (A + I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aussi } \begin{cases} E_{-1}(A) = \text{Vect}(\epsilon_1) \\ \text{où } \epsilon_1 = (1, 0, -1) \end{cases}$$

$$E_0(A) = \text{Ker } A \text{ alors : } C_1 + C_2 = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aussi } E_0(A) = \text{Vect}(\epsilon_2) \text{ où } \epsilon_2 = (1, 1, 0).$$

$$E_3(A) = \text{Ker}(A - 3I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ alors : } C_1 + C_2 + C_3 = 0 \Leftrightarrow (A - 3I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ aussi } \begin{cases} E_3(A) = \text{Vect}(\epsilon_3) \\ \text{où } \epsilon_3 = (1, 1, 1) \end{cases}$$

Finalement : $\mathcal{B}_{diag} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de diagonalisation,

$$\boxed{P = P_{\mathcal{B}_{can}, \mathcal{B}_{diag}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = PDP^{-1}}$$

3. Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. On pose $\Delta = P^{-1}MP$ où P est la matrice déterminée dans la question 2.

a. Démontrer que $M^2 - 2M = A \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$

On a $A = PDP^{-1}$ et $M = P\Delta P^{-1}$ aussi $M^2 = P\Delta P^{-1} \times P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1}$ puis :
 $M^2 - 2M = A \Leftrightarrow P\Delta^2 P^{-1} - 2P\Delta P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow P(\Delta^2 - 2\Delta)P^{-1} = PDP^{-1} \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$
 en pré-multipliant par P^{-1} et post-multipliant par P dans chacun des membre de l'égalité.

On suppose désormais que M est solution de $(\mathcal{E}_1)$.

b. Démontrer que $MA = AM$

On sait que $M^2 - 2M = A$ aussi $MA = M(M^2 - 2M) = M^3 - 2M^2 = (M^2 - 2M)M = AM$ soit $MA = AM$

c. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Démontrer que le vecteur $Y = MX$ appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ et en déduire que X est un vecteur propre de M.

On sait que $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ (vecteur colonne) avec $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$ aussi le produit matriciel $Y = MX \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ puisque $M \in M_3(\mathbb{R})$ et $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$.

De plus : $AY = AMX =$ avec 3(b) $MAX =$ or $AX = \lambda X$ $M(\lambda X) = \lambda(MX) = \lambda Y$ donc $Y \in \text{Ker}(A - \lambda I_3) = E_\lambda(A)$

D'après la question 2, les valeurs propres de A sont toutes simples donc les espaces propres de A sont tous de dimension 1 aussi, si X est vecteur propre de A associé à λ , alors $E_\lambda(A) = \text{Vect}(X)$.

Dés lors : $Y = MX \in E_\lambda(X) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, Y = MX = \alpha X$ avec $X \neq 0$ ce qui permet de conclure que

X est un vecteur propre de M

d. En déduire que la matrice Δ est diagonale.

Les colonnes de la matrice P forment une base de vecteurs propres de A. D'après la question précédente, c'est donc aussi une base de vecteurs propres de M autrement dit une base de diagonalisation de M. Par changement de bases, on a donc : $\Delta = P^{-1}MP$ qui est diagonale.

4. a. Déterminer toutes les matrices diagonales Δ vérifiant $\Delta^2 - 2\Delta = D$

On cherche Δ sous la forme $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ alors $\Delta^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$ or $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$\Delta^2 - 2\Delta = D \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2a = -1 \\ b^2 - 2b = 0 \\ c^2 - 2c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{0, 2\} \\ b = 1 \\ c \in \{-1, 3\} \end{cases}$ avec la question 1 d'où les quatres matrices possibles :

$\Delta \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$ où $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \Delta_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \Delta_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b. En déduire toutes les matrices M vérifiant $M^2 - 2M = A$. On exprimera M à l'aide de P et de matrices diagonales à préciser.

Avec la question 3(a) :

$M^2 - 2M = A \Leftrightarrow \Delta^2 - 2\Delta = D$ où $\Delta = P^{-1}MP \Leftrightarrow \Delta = P^{-1}MP \in \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$

$\Leftrightarrow M \in \{P\Delta_1P^{-1}, P\Delta_2P^{-1}, P\Delta_3P^{-1}, P\Delta_4P^{-1}\}$

Partie B : Cette partie s'intéresse aux matrices M de $M_2(\mathbb{C})$ vérifiant $(\mathcal{E}_2)$: $M^2 - 2M = \alpha I$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$

1. Démontrer que si $M \in M_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$, il en est de même pour toute matrice semblable à M

On sait que $M \in M_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$ donc : $M^2 - 2M = \alpha I$

On se donne une matrice N semblable à M autrement dit $\exists P \in GL_2(\mathbb{C}), N = P^{-1}MP$

On vérifie que $N^2 - 2N = \alpha I$ car, en effet :

$N^2 - 2N = (P^{-1}MP)(P^{-1}MP) - 2P^{-1}MP = P^{-1}M \underbrace{PP^{-1}}_{=I} MP - 2P^{-1}MP = P^{-1}M^2P - 2P^{-1}MP = P^{-1} \underbrace{(M^2 - 2M)}_{=\alpha I} P = \alpha P^{-1}P = \alpha I$

2. Soient $M \in M_2(\mathbb{C})$ une solution de $(\mathcal{E}_2)$ et λ une valeur propre de M. Établir que $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$

On sait que $M \in M_2(\mathbb{C})$ est solution de $(\mathcal{E}_2)$ donc : $M^2 - 2M = \alpha I$

et que λ est valeur propre de M donc : $\exists X \in M_{2,1}(\mathbb{C}), MX = \lambda X$ et $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors, d'une part : $(M^2 - 2M)X = M^2X - 2MX = M(\lambda X) - 2\lambda X = \lambda MX - 2\lambda X = \lambda^2 X - 2\lambda X = (\lambda^2 - 2\lambda)X$

Mais aussi $M^2 - 2M = \alpha I$ donc : $(M^2 - 2M)X = (\alpha I)X = \alpha X$

Dés lors : $(\lambda^2 - 2\lambda)X = \alpha X \Leftrightarrow (\lambda^2 - 2\lambda - \alpha)X = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - \alpha = 0$ car $X \neq 0$ aussi $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$

3. On note λ_1 et λ_2 les deux racines (éventuellement égales) de $\lambda^2 - 2\lambda = \alpha$

a. Soit $\alpha = -1$. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ si et seulement si 1 est valeur propre double de M

Si $\alpha = -1$, on sait d'après les solutions de l'équation (E_2) de la question A.1. que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

D'après la question précédente, on sait que :

- si M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ alors : λ est valeur propre de M $\Rightarrow \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$

Ainsi, lorsque $\alpha = -1$, $\text{Sp}(M) \subset \{1\}$ et on sait que $\text{Sp}(M) \neq \emptyset$ car il contient forcément les deux racines complexes (éventuellement égales) du polynôme caractéristique χ_M de M qui est unitaire de degré 2 aussi $\text{Sp}(M) = \{1\}$ et on peut conclure que 1 est valeur propre double de M

- Réciproquement : si $M \in M_2(\mathbb{C})$ admet 1 pour valeur propre double alors son polynôme caractéristique

$\chi_M(x) = (x-1)^2$ est scindé donc la matrice M est trigonalisable (éventuellement diagonalisable) :

M est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par trigonalisation. Or : $T^2 - 2T = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -I = \alpha I$

donc T solution de $(\mathcal{E}_2)$ et donc M aussi à cause de la question B.1.

b. Soit $\alpha \neq -1$. Démontrer que si M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ alors M est diagonalisable.

Préciser les matrices diagonales D, semblables à M, possibles (à l'aide de λ_1 et λ_2)

On sait que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ donc que : $M^2 - 2M = \alpha I$

Raisonnons par l'absurde : si M n'est pas diagonalisable alors

M a forcément une valeur propre double λ (sinon elle aurait deux valeurs propres distinctes et χ_M serait scindé à racines simples ce qui conduirait à avoir M diagonalisable)

De plus, on sait que M est trigonalisable : elle sera donc semblable à une matrice $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ (sinon T serait diagonale et M diagonalisable).

Puisque M est solution de (E_2) , la matrice T l'est aussi et :

$$T^2 - 2T = \alpha I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2a\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\lambda & 2a \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} = \alpha I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & 2a(\lambda - 1) \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a(\lambda - 1) = 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow_{a \neq 0} \begin{cases} \lambda = 1 \\ -1 = \alpha \text{ Absurde!} \end{cases}$$

Finalement, on a prouvé, par l'absurde, que lorsque $\alpha \neq -1$, si M est solution de $(\mathcal{E}_2)$ alors M est diagonalisable

M est donc semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ qui doit, elle aussi vérifier $(\mathcal{E}_2)$ (d'après B.1) de sorte que :

$$D^2 - 2D = \alpha I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & 0 \\ 0 & \mu^2 - 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda = \alpha \\ \mu^2 - 2\mu = \alpha \end{cases} \Rightarrow \{\lambda, \mu\} \subset \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

Cela conduit à 4 matrices D possibles : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

c. Soit $\alpha \neq -1$. On suppose que M est semblable à l'une des matrices D données à la question précédente. Démontrer que M est solution de $(\mathcal{E}_2)$

On vérifie facilement que les 4 matrices D possibles sont toutes solution de $(\mathcal{E}_2)$ et donc, grâce à la question B.1., la matrice M le sera aussi

d. Pour $\alpha = 0$, donner une matrice M non diagonale solution de $(\mathcal{E}_2)$. On explicitera ses 4 coefficients.

La matrice M est toujours trigonalisable donc, quitte à la trigonaliser, on choisit $M = T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$ qui doit aussi être solution de $(\mathcal{E}_2)$ donc :

$$T^2 - 2T = O_{22} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda^2 & a\lambda + a\mu \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\lambda & 2a \\ 0 & 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 2\lambda = 0 \\ \mu^2 - 2\mu = 0 \\ a(\lambda + \mu - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \{\lambda, \mu\} \subset \{0, 2\} \\ \lambda + \mu - 2 = 0 \end{cases}$$

Prenons $\lambda = 2$, $\mu = 0$ et $a = 1$ alors $M = T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonale et elle vérifie $M^2 - 2M = O_{22}$