

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = u_n v_n$

$$\text{On pose aussi : } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ et, pour } n \geq 3 : \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

Remarque préliminaire : On admet que, si α et β sont deux réels strictement positifs alors : $(1 + \alpha)(1 + \beta) \geq 1 + \alpha + \beta$

$$(1 + \alpha)(1 + \beta) = 1 + \alpha + \beta + \underbrace{\alpha\beta}_{>0} \geq 1 + \alpha + \beta$$

1. Calculer Δ_1 et Δ_2

$\Delta_1 = 1 - u_1(-v_1) \Leftrightarrow \Delta_1 = 1 + a_1$. On développe selon L_1 pour calculer Δ_2 :

$$\Delta_2 = +1 \times \begin{vmatrix} 1 & -v_2 \\ u_2 & 1 \end{vmatrix} - (-v_1) \begin{vmatrix} u_1 & -v_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 + u_2 v_2) + v_1 u_1 = 1 + a_1 + a_2 = \Delta_2$$

2. Démontrer que, pour $n \geq 3$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}$

Pour $n \geq 3$, on développe le déterminant Δ_n (d'ordre $n + 1$) suivant la dernière colonne :

$$\Delta_n = \underbrace{(-1)^{(n+1)+n}}_{=-1} (-v_n) \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_{n-1} & 1 & -v_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & u_n \end{vmatrix} + \underbrace{(-1)^{(n+1)+(n+1)}}_{=1} \times 1 \times \Delta_{n-1}$$

d'ordre n

Puis on développe le premier déterminant d'ordre n selon la dernière ligne :

$$\Delta_n = -(-v_n) \times \underbrace{(-1)^{n+n}}_{=1} u_n \Delta_{n-2} + \Delta_{n-1} \Leftrightarrow \Delta_n = u_n v_n \Delta_{n-2} + \Delta_{n-1} \Leftrightarrow \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}$$

3. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \geq 1$. En déduire la monotonie de la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

On prouve le résultat par récurrence double avec l'hypothèse HR_n : « $\Delta_n \geq 1$ »

Initialisation : $\Delta_1 = 1 + \underbrace{a_1}_{>0} \geq 1$ et $\Delta_2 = 1 + \underbrace{a_1}_{>0} + \underbrace{a_2}_{>0} \geq 1$

Aussi HR_1 et HR_2 sont vérifiées.

Hérédité : On montre $\begin{cases} HR_n \\ HR_{n+1} \end{cases} \Rightarrow HR_{n+2}$ pour un entier naturel n non nul quelconque.

D'après 2, comme $n + 2 \geq 3$, on a : $\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + a_{n+2} \Delta_n \geq \Delta_{n+1}$ puisque $a_{n+2} > 0$ et $\Delta_n > 0$ par HR_n

Et donc : $\Delta_{n+2} \geq \Delta_{n+1} \geq 1$ avec HR_{n+1} d'où $\Delta_{n+2} \geq 1$ et HR_{n+2} est vérifiée.

Conclusion : On a justifié, par une récurrence à deux pas, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \geq 1$

Mais alors, pour $n \geq 3$: $\Delta_n - \Delta_{n-1} = a_n \Delta_{n-2} > 0$ puisque $a_n > 0$ et $\Delta_{n-2} \geq 1 > 0$

et on a aussi : $\Delta_2 - \Delta_1 = a_2 > 0$ donc : $\forall n \geq 2, \Delta_n > \Delta_{n-1} \Rightarrow (\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante

4. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$

On considère l'hypothèse de récurrence HR_n : « $\Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ »

Initialisation : $\Delta_1 = 1 + a_1 \leq 1 + a_1 = \prod_{k=1}^1 (1 + a_k)$ donc HR_1 est vérifiée.

$\Delta_2 = 1 + a_1 + a_2 \leq (1 + a_1)(1 + a_2) = \prod_{k=1}^2 (1 + a_k)$ en utilisant la question préliminaire avec $\alpha = a_1 > 0$ et $\beta = a_2 > 0$

Hérédité : On montre $\begin{cases} \text{HR}_n \\ \text{HR}_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \text{HR}_{n+2}$ pour un entier naturel n non nul quelconque.

D'après 2, comme $n+2 \geq 3$, on a :

$$\Delta_{n+2} = \Delta_{n+1} + a_{n+2}\Delta_n \leq \prod_{k=1}^{n+1} (1+a_k) + a_{n+2} \prod_{k=1}^n (1+a_k) \quad \text{avec } \text{HR}_{n+1} \text{ et } \text{HR}_n \text{ car } a_{n+2} > 0$$

On repère un facteur commun dans le second membre qu'on factorise :

$$\Delta_{n+2} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1+a_k) \right) \times (1+a_{n+1}+a_{n+2}) \leq \left(\prod_{k=1}^n (1+a_k) \right) \times (1+a_{n+1})(1+a_{n+2})$$

en utilisant à nouveau la question préliminaire avec $\alpha = a_{n+1} > 0$ et $\beta = a_{n+2} > 0$

(Tous les nombres manipulés sont > 0 donc l'ordre est bien conservé par multiplication)

Et donc $\Delta_{n+2} \leq \prod_{k=1}^{n+2} (1+a_k)$ d'où HR_{n+2} est vérifiée.

Conclusion : On a justifié, par une récurrence à deux pas, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1+a_k)$

5. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1+a_k)$ et on suppose que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.

(a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1+a_n)$ converge.

Comme $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, on sait que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (sinon il y aurait divergence grossière)

Mais alors : $\begin{cases} \ln(1+u) \sim_0 u \\ u = a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \Rightarrow \ln(1+a_n) \sim a_n > 0$ donc, par critère d'équivalence, les séries $\sum_{n \geq 1} \ln(1+a_n)$ et

$\sum_{n \geq 1} a_n$ ont la même nature or cette dernière converge donc la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1+a_n)$ converge (notée CV).

(b) En déduire que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

D'après 3 et 4, on sait que : $1 < \Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1+a_k)$

aussi, par croissance de la fonction $\ln$, on a : $0 < \ln(\Delta_n) \leq \sum_{k=1}^n \ln(1+a_k) = S_n$

(le logarithme d'un produit étant la somme des logarithmes de chaque facteur)

On sait que $\sum_{n \geq 1} \ln(1+a_n)$ converge or c'est une série à termes positifs ($1+a_k > 1 \Rightarrow \ln(1+a_k) > 0$)

autrement dit que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ des sommes partielles est majorée par une constante S .

Cette constante S est donc aussi un majorant de la suite $(\ln \Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Or cette suite est croissante (puisque la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est elle-même croissante et que $\ln$ est une fonction croissante). Une suite croissante majorée converge donc : $\exists \ell \in \mathbb{R}, \ln \Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \Rightarrow \Delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$

On a donc bien justifié que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge

6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

(a) Pour $n \geq 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$. Que dire de la nature de la série $\sum_{n \geq 2} t_n$?

C'est une série télescopique associée à la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. On sait, d'après le cours, que la série $\sum_{n \geq 2} t_n$ et la suite (Δ_n)

ont la même nature. Or, on suppose que la suite (Δ_n) converge donc : la série $\sum_{n \geq 2} t_n$ converge.

(b) Prouver alors que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge

On sait, d'après la question 2, que : $t_n = a_n \Delta_{n-2}$ Mais avec la question 3 sachant $a_n > 0 : \Delta_{n-2} \geq 1 \Rightarrow a_n \Delta_{n-2} \geq a_n$
Par transitivité des inégalités, on a donc : $t_n \geq a_n > 0$

Alors : $\begin{cases} 0 < a_n \leq t_n \\ \sum_{n \geq 2} t_n \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n \geq 2} a_n \text{ CV} \Rightarrow \text{la série } \sum_{n \geq 1} a_n \text{ CV}$ (Pas d'influence des premiers termes sur la nature de la série)

7. Quel résultat a été finalement démontré avec les questions 5 et 6 ?

On a en définitive prouvé que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ et la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont la même nature.

Partie I : On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n) + \sin(u_n) - 1$

1. On introduit les fonctions f et g de la variable réelle x définie par $f(x) = \cos(x) + \sin(x) - 1$ et $g(x) = f(x) - x$
On pourra remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$

- (a) Prouver que, pour x réel, $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$.

$$\text{Pour } x \text{ réel : } \cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

- (b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ alors que g est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{4}[$.

Par les théorèmes usuels, les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$f'(x) = -\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \quad \text{et} \quad g'(x) = -\sin x + \cos x - 1 = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - 1$$

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ aussi } f'(x) > 0 \text{ sur }]0, \frac{\pi}{4}[\text{ et } f \text{ est strictement croissante sur }]0, \frac{\pi}{4}[$$

$$\text{Or } \sqrt{2} > 0 \text{ d'où : } 0 < \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) < 1 \Rightarrow g'(x) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - 1 < 0 \text{ donc } g \text{ est strictement décroissante sur }]0, \frac{\pi}{4}[$$

- (c) Prouver alors, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, \frac{\pi}{4}[$. On rappelle que $\sqrt{2} \approx 1,41$ et que $\frac{\pi}{4} \approx 0,78$

Soit l'hypothèse de récurrence à l'ordre n HR_n : « $u_n \in]0, \frac{\pi}{4}[$ »

Initialisation Par définition de la suite, $u_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[$ donc HR_0 est vraie.

Hérédité On prouve $HR_n \Rightarrow HR_{n+1}$. On sait que, par HR_n que : $0 < u_n < \frac{\pi}{4}$

$$\text{Or } f \text{ est strictement croissante sur }]0, \frac{\pi}{4}[\text{ donc : } \underbrace{f(0)}_{=0} < \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} < \underbrace{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{=\sqrt{2}-1} \text{ et : } \sqrt{2} - 1 \approx 0,41 < \frac{\pi}{4} \text{ vu que } \frac{\pi}{4} \approx 0,78$$

$$\text{Ainsi : } 0 < u_{n+1} < \frac{\pi}{4} \text{ de sorte que } HR_{n+1} \text{ est vérifiée.}$$

Conclusion Par récurrence simple, on a justifié que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, HR_n est vraie soit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, \frac{\pi}{4}[$

- (d) Démontrer aussi que la suite (u_n) est décroissante.

Pour étudier la monotonie, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$

Or, d'après les questions précédentes : $u_n \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et g est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ donc

$$g(0) > g(u_n) > g\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{or} \quad g(0) = f(0) - 0 = 0 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0 \text{ et } \boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bien décroissante}}$$

- (e) Justifier enfin que la suite (u_n) converge vers 0.

D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est décroissante et elle est minorée par 0 donc elle converge vers un réel ℓ d'après le théorème de convergence monotone. On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ car le passage à la limite élargit les inégalités et $u_n \in]0, \frac{\pi}{4}[$. On sait aussi : $u_{n+1} = f(u_n)$ aussi, en passant à la limite : $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow g(\ell) = 0$

Or : $g(0) = 0$ et, puisque g est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{4}[$, $g(x) < 0$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$ aussi l'unique solution possible de $g(\ell) = 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ est bien $\ell = 0$ de sorte que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

2. Donner la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$

Il s'agit d'une série alternée puisque $u_n > 0$ d'après 1-c. De plus, on sait que la suite (u_n) tend vers 0 en décroissant (avec 1-e et 1-d) donc le théorème des séries alternées s'applique et on sait que $\boxed{\text{la série } \sum (-1)^n u_n \text{ converge}}$

3. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $g(x)$. En déduire que : $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$

$$\text{On a : } g(x) = \cos x + \sin x - 1 - x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + (x + o(x^2)) - 1 - x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{alors} \quad g(x) \sim_0 -\frac{x^2}{2}$$

$$\text{Aussi : } u_{n+1} - u_n = g(u_n) \sim -\frac{u_n^2}{2} \quad \text{avec} \quad x = u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{u_{n+1} - u_n \sim -\frac{u_n^2}{2}}$$

- (b) En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$

$$\text{On a } u_{n+1} - u_n \sim -\frac{u_n^2}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{u_n^2}{2} < 0 \quad \text{donc on peut appliquer le critère d'équivalence et on sait que}$$

la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et la série $\sum \left(-\frac{u_n^2}{2}\right)$ ont la même nature

Or, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est télescopique associée à la suite (u_n) qui converge donc c'est une série convergente.

La série $\sum u_n^2$ a la même nature que la série $\sum \left(-\frac{u_n^2}{2}\right)$. On peut donc conclure que la série $\sum u_n^2$ est convergente

Partie II : On considère une suite (a_n) définie par : $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$ On pourra admettre que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$

1. Calculer a_0 en posant $t = \sin(u)$. On admettra que $a_1 = \frac{1}{3}$.

On pose $t = \sin(u)$ dans $a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ alors $dt = \cos(u) du$ et : $t \Big|_0^1 \Leftrightarrow u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

Le changement de variable est possible car $[\varphi : u \mapsto \sin(u)]$ est C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $[f : t \mapsto \sqrt{1-t^2}]$ est continue sur $[0, 1]$

$$a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(u)} \cos(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{|\cos(u)|}_{\geq 0} \cos(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du$$

or $\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$ donc : $a_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2u) + 1}{2} du = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2u)}{2} + u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}$ soit $a_0 = \frac{\pi}{4}$

2. Montrer que (a_n) est une suite décroissante. On pourra exploiter les propriétés de l'intégrale

Pour $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 t^{n+1} \sqrt{1-t^2} dt - \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^1 (t-1) t^n \sqrt{1-t^2} dt$ par linéarité de l'intégrale

Mais : $\forall t \in [0, 1], \underbrace{t^n}_{\geq 0} \times \underbrace{(1-t)}_{\leq 0} \times \underbrace{\sqrt{1-t^2}}_{\geq 0} \leq 0$ donc, par positivité de l'intégrale : $a_{n+1} - a_n \leq 0$
La suite (a_n) est donc décroissante

3. En remarquant que $a_{n+2} = \int_0^1 t^{n+1} \times t \sqrt{1-t^2} dt$, démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$

On réalise une intégration par parties avec : $\begin{cases} u(t) = t^{n+1} \\ v'(t) = t \sqrt{1-t^2} = -\frac{1}{2} \times (-2t) \times (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$ soit $\begin{cases} u'(t) = (n+1)t^n \\ v(t) = -\frac{1}{2} \times \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont bien de classe C^1 sur $[0, 1]$.

$a_{n+2} = \left[t^{n+1} \times -\frac{1}{3} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \times -\frac{1}{3} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = 0 + \frac{(n+1)}{3} \int_0^1 t^n (1-t^2) \sqrt{1-t^2} dt$ mais alors, par linéarité :

$a_{n+2} = \frac{(n+1)}{3} \left(\int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt - \int_0^1 t^{n+2} \sqrt{1-t^2} dt \right) = \frac{(n+1)}{3} (a_n - a_{n+2}) \Leftrightarrow 3a_{n+2} + (n+1)a_{n+2} = (n+1)a_n \Leftrightarrow$ $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$

4. Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ et, en déduire que : $a_{n+1} \sim a_n$

Avec II-2, on a : $a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow \frac{a_{n+2}}{a_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ car $a_n > 0$ puis : $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ avec II-3.

Comme $\frac{n+1}{n+4} \sim \frac{n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, le théorème des gendarmes permet alors d'obtenir que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Leftrightarrow$ $a_{n+1} \sim a_n$

5. Peut-on conclure avec la règle de d'Alembert sur la nature de la série $\sum a_n$?

Puisque $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on ne peut conclure avec la règle de d'Alembert puisqu'il s'agit du cas douteux.

6. Démontrer que la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ où $b_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est suite constante.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $b_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1}a_n$ or $a_{n+1} = a_{(n-1)+2} = \frac{(n-1)+1}{(n-1)+4} a_{n-1} = \frac{n}{n+3} a_{n-1}$ avec II-3

Aussi : $b_{n+1} = (n+1)(n+2)(n+3) \times \frac{n}{n+3} a_{n-1} a_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1} = b_n$ et la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est donc constante

7. En déduire que $a_n^2 \sim \frac{\pi}{2n^3}$ et conclure sur la nature de la série $\sum a_n$

On a : $b_n = b_1 = 1 \times 2 \times 3 \times a_1 \times a_0 = 6 \times \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$ mais $b_n \sim n \times n \times n \times a_n \times a_n$ car $a_{n-1} \sim a_n$ avec II-4

Aussi : $n^3 a_n^2 \sim b_n \sim \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $a_n^2 \sim \frac{\pi}{2n^3}$ mais alors $a_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}$ car $a_n > 0$ aussi, par critère d'équivalence $\sum a_n$ a la même

nature que la série $\sum \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}$ qui est de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ donc la série $\sum a_n$ converge

1. On considère l'équation différentielle $(E_1) : \text{sh}(t)y' - \text{ch}(t)y = 1$

(a) Vérifier que $f = [t \mapsto -\text{ch}(t)]$ est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$

f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ avec $f'(t) = -\text{sh}(t)$ aussi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \text{sh}(t)f'(t) - \text{ch}(t)f(t) = \text{sh}(t) \times (-\text{sh}(t)) - \text{ch}(t) \times (-\text{ch}(t)) = -\text{sh}^2(t) + \text{ch}^2(t) = 1$$

Ainsi, la fonction $f = [t \mapsto -\text{ch}(t)]$ est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$

(b) Résoudre (E_1) sur un intervalle I qui est inclus dans $\mathbb{R}^*$

(E_1) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 qui est résolue sur I car $\text{sh}(t) \neq 0$ si $t \neq 0$. Le cours s'applique.

• Solutions homogènes $\text{sh}(t)y' - \text{ch}(t)y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{\text{ch}(t)}{\text{sh}(t)}y = 0$ car $t \neq 0$ sur I

L'ensemble des solutions homogènes est $\text{Vect}(h)$ où $h(t) = e^{-A(t)}$ avec A une primitive de a où

$$a(t) = -\frac{\text{ch}(t)}{\text{sh}(t)} = -\frac{u'(t)}{u(t)} \text{ où } u(t) = \text{sh}(t) \text{ donc } A(t) = -\ln|\text{sh}(t)| \text{ convient et } h(t) = e^{\ln|\text{sh}(t)|} = |\text{sh}(t)|$$

Mais, $\text{sh}(t)$ garde un signe constant sur I et quitte à faire porter le signe à la constante, on peut affirmer que les solutions homogènes sont les fonctions $C \times h$ où $C \in \mathbb{R}$ et $h(t) = \text{sh}(t)$

• Solution particulière On sait que $[t \mapsto -\text{ch}(t)]$ est une solution d'après 1a).

• Solutions générales L'expression de la solution générale de (E_1) sur I est $y(t) = C \text{sh}(t) - \text{ch}(t)$ où $C \in \mathbb{R}$

(c) Déterminer toutes les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$

Il s'agit désormais d'étudier le recollement en 0 des solutions.

Analyse Si y est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ alors :

- c'est une solution sur $] -\infty, 0[$ soit : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t < 0, y(t) = C \text{sh}(t) - \text{ch}(t)$

- c'est une solution sur $]0, +\infty[$ soit : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall t > 0, y(t) = K \text{sh}(t) - \text{ch}(t)$

- l'équation est vérifiée en 0 donc $0 \times y'(0) - 1 \times y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = -1$

- y est une fonction continue et dérivable en 0 $\Leftrightarrow y$ admet en 0 un DL à l'ordre 1 or :

$$\text{en } 0^- : K \text{sh}(t) - \text{ch}(t) = K(t + o(t)) - (1 + o(t)) = -1 + Kt + o(t) \quad \text{en } 0^+ : C \text{sh}(t) - \text{ch}(t) = -1 + Ct + o(t)$$

L'existence et l'unicité du DL conduit à $K = C$ et on a : $y(0) = -1$ et $y'(0) = K$

Synthèse Les fonctions $[t \mapsto C \text{sh}(t) - \text{ch}(t)]$ où $C \in \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E_1) pour tout t réel

Conclusion : L'expression d'une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est $y(t) = C \text{sh}(t) - \text{ch}(t)$ où $C \in \mathbb{R}$

2. On considère l'équation différentielle $(E_2) : (1+x^2)y'' + 4xy' + \frac{1+2x^2}{1+x^2}y = 0$

(a) Vérifier que la fonction $h = \left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right]$ est une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

Puisque $1+x^2 > 0$ pour x réel, h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ par les théorèmes usuels (composition et quotient) :

$$h(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad h'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x \times (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad h''(x) = -1 \times (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - x \times -\frac{3}{2} \times 2x \times (1+x^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{2x^2-1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$(1+x^2)h''(x) + 4xh'(x) + \frac{1+2x^2}{1+x^2}h(x) = (1+x^2) \times \frac{2x^2-1}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} + 4x \times \frac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1+2x^2}{1+x^2} \times \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2x^2-1-4x^2+1+2x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Finalement, h est bien une solution particulière de (E_2) sur $\mathbb{R}$

(b) Résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}$

(E_2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène résolue en y'' car $1+x^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E_2) est de la forme $\text{Vect}(h_1, h_2)$ où (h_1, h_2) est une famille libre de solutions homogènes.

On connaît déjà l'une des solutions donc on recherche l'autre en utilisant la méthode de Lagrange. On la recherche sous la forme $y(x) = h(x)z(x)$ où z est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on cherche une équation d'ordre 1 vérifiée par z' :

$$y = z \times h \quad y' = z'h + zh' \quad y'' = z''h + 2z'h' + zh''$$

$$(1+x^2)y'' + 4xy' + \frac{1+2x^2}{1+x^2}y = 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(hz'' + 2z'h' + zh'') + 4x(z'h + zh') + \frac{1+2x^2}{1+x^2} \times zh = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+x^2)hz'' + (2(1+x^2)h' + 4xh)z' + \underbrace{\left((1+x^2)h'' + 4xh' + \frac{1+2x^2}{1+x^2}h \right)}_{=0} \times z = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}z'' + \left(2(1+x^2) \times -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + 4x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \times z' = 0$$

On a donc obtenu : $y = z \times h$ solution de $(E_2) \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}z'' + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}z' = 0 \Leftrightarrow z'' - \frac{2x}{1+x^2}z' = 0$

On résout l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 $Y' + \frac{2x}{1+x^2}Y = 0$

Une primitive de $a(x) = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{v'(x)}{v(x)}$ où $v(x) = 1+x^2$ est $A(x) = \ln|1+x^2| = \ln(1+x^2)$ car $1+x^2 > 0$

Aussi, l'expression de la solution est $Y(x) = Ce^{-A(x)} = Ce^{-\ln(1+x^2)} = \frac{C}{1+x^2}$ où $C \in \mathbb{R}$

Ainsi : $y = z \times h$ solution de $(E_2) \Leftrightarrow z'(x) = \frac{C}{1+x^2}$ où $C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z(x) = C \operatorname{Arctan} x + K$ où $(C, K) \in \mathbb{R}^2$

$$\Leftrightarrow y(x) = z(x)h(x) = \frac{C \operatorname{Arctan} x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} \text{ où } (C, K) \in \mathbb{R}^2$$

En conclusion : l'expression de la solution générale de (E_2) est $y(x) = \frac{C \operatorname{Arctan} x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$ où $(C, K) \in \mathbb{R}^2$

càd que l'ensemble des solutions est donc $\operatorname{Vect}(h_1, h_2)$ où $h_1 = h = \left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right]$ et $h_2 = \left[x \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{1+x^2}} \right]$

3. Soit (E_3) l'équation différentielle $x^2 y'' - 5xy' + 9y = x + 1$

(a) Déterminer une solution P polynômiale et non nulle de (E_3) sur $\mathbb{R}$

Notons $n \in \mathbb{N}$ son degré et a son coefficient dominant alors $P(x) = ax^n + R(x)$ où $\deg(R) < n$ et $a \neq 0$

$$x^2 P''(x) - 5xP'(x) + 9P(x) = x + 1 \Leftrightarrow x^2 \left(n(n-1)ax^{n-2} + R''(x) \right) - 5x \left(nax^{n-1} + R'(x) \right) + 9(ax^n + R(x)) = x + 1$$

$$\Leftrightarrow \left(n(n-1) - 5n + 9 \right) ax^n + \underbrace{x^2 R''(x) - 5xR'(x) + 9R(x)}_{\text{de degré } < n} = x + 1$$

$$\Rightarrow n = 1 \text{ et } (n^2 - 6n + 9)a = 1 \Rightarrow n = 1 \text{ et } 4a = 1$$

On cherche alors P d'expression $P(x) = \frac{1}{4}x + b$ où $b \in \mathbb{R}$ soit :

$$x^2 P''(x) - 5xP'(x) + 9P(x) = x + 1 \Leftrightarrow x^2 \times 0 - 5x \times \frac{1}{4} + 9 \left(\frac{x}{4} + b \right) = x + 1 \Leftrightarrow x + 9b = x + 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{9}$$

L'unique solution de (E_3) qui est polynômiale est $P(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{9}$

(b) Résoudre l'équation $z'' - 6z' + 9z = 0$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique est

$$r^2 - 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow (r-3)^2 = 0 \text{ aussi les solutions ont donc pour expression } z(t) = (At + B)e^{3t} \text{ où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

(c) I est l'un des intervalle $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$. Pour résoudre l'équation homogène associée à (E_3) , on pose $t = \ln|x|$.

Sur quel intervalle varie la nouvelle variable t ? $t = \ln|x| \in \mathbb{R}$ puisque $|x| \in]0, +\infty[$ lorsque x décrit $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$

Calculer les dérivées première et seconde de $y(x) = z(\ln|x|)$ à l'aide des dérivée première et seconde de z lorsque z est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis justifier que :

$$y \text{ est solution homogène de } (E_3) \text{ sur } I \Leftrightarrow z \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } z'' - 6z' + 9z = 0$$

Par composition de fonctions deux fois dérivable et puisque $|x| > 0$ sur I alors y est deux fois dérivable sur I et on a :

$$y'(x) = (\ln|x|)' z'(\ln|x|) = \frac{1}{x} \times z'(\ln|x|) \quad \text{et} \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} \times z'(\ln|x|) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} z''(\ln|x|) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln|x|) + \frac{1}{x^2} z''(\ln|x|)$$

Alors : y est solution homogène de (E_3) sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, x^2 y''(x) - 5x y'(x) + 9y(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I, z''(\ln|x|) - z'(\ln|x|) - 5z'(\ln|x|) + 9z(\ln|x|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, z''(t) - 6z'(t) + 9z(t) = 0$$

(d) Déterminer les solutions de (E_3) sur I lorsque I est l'un des intervalle $]0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0[$.

Dans ce cas, (E_3) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 résolue en y'' donc, d'après le cours, l'ensemble des solutions est de la forme $y_p + \operatorname{Vect}(h_1, h_2)$ où y_p est une solution particulière et $\operatorname{Vect}(h_1, h_2)$ est l'ensemble des solutions homogènes avec (h_1, h_2) une famille libre de solutions homogènes.

La question 3a donne une solution particulière sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur I soit $y_p = P = \left[x \mapsto \frac{x}{4} + \frac{1}{9} \right]$

D'après 3c et 3b :

$$y = [x \mapsto z(\ln|x|)] \text{ est solution homogène de } (E_3) \text{ sur } I \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = (At + B)e^{3t} \text{ où } t = \ln|x|$$

$$\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, y(x) = z(\ln|x|) = (A \ln|x| + B)e^{3 \ln|x|}$$

$$= A|x|^3 \ln|x| + B|x|^3$$

L'expression d'une solution de (E_3) sur I est donc $y(x) = \alpha x^3 \ln|x| + \beta x^3 + \frac{x}{4} + \frac{1}{9}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (quitte à faire porter le signe de x^3 sur les constantes réelles)