

DEVOIR SURVEILLÉ N° 3 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3h- La calculatrice n'est pas autorisée.

Ne pas écrire sur la première page de votre composition (sauf nom, prénom et présentation copie)
Les problèmes sont indépendants. Utiliser des copies différentes pour chacun des problèmes.
Chacun des problèmes comptera pour une part à peu près comparable dans l'évaluation finale.

PROBLÈME N° 1 Un des 3 exercices d'une épreuve de 3h d'un sujet E3A - ENSAM - ESTP pour PC de 2012

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = u_n v_n$

$$\text{On pose aussi : } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix} \text{ et, pour } n \geq 3 : \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

Remarque préliminaire : On admet que, si α et β sont deux réels strictement positifs alors : $(1 + \alpha)(1 + \beta) \geq 1 + \alpha + \beta$

1. Calculer Δ_1 et Δ_2
2. Démontrer que, pour $n \geq 3$, $\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}$
3. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \geq 1$. En déduire la monotonie de la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
4. Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$
5. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \ln(1 + a_k)$ et on suppose que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.
 - (a) Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + a_n)$ converge.
 - (b) En déduire que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
 - (a) Pour $n \geq 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$. Que dire de la nature de la série $\sum_{n \geq 2} t_n$?
 - (b) Prouver alors que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge
7. Quel résultat a été finalement démontré avec les questions 5 et 6 ?

Partie I : On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n) + \sin(u_n) - 1$

- On introduit les fonctions f et g de la variable réelle x définie par $f(x) = \cos(x) + \sin(x) - 1$ et $g(x) = f(x) - x$. On pourra remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$
 - Prouver que, pour x réel, $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$.
 - En déduire que f est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ alors que g est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{4}[$.
 - Prouver alors, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, \frac{\pi}{4}[$. On rappelle que $\sqrt{2} \simeq 1,41$ et que $\frac{\pi}{4} \simeq 0,78$
 - Démontrer aussi que la suite (u_n) est décroissante.
 - Justifier enfin que la suite (u_n) converge vers 0.
- Donner la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$
- Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $g(x)$. En déduire que : $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$
 - En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$

Partie II : On considère une suite (a_n) définie par : $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$ On pourra admettre que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$

- Calculer a_0 en posant $t = \sin(u)$. On admettra que $a_1 = \frac{1}{3}$.
- Montrer que (a_n) est une suite décroissante. On pourra exploiter les propriétés de l'intégrale
- En remarquant que $a_{n+2} = \int_0^1 t^{n+1} \times t \sqrt{1-t^2} dt$, démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $a_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} a_n$
- Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ et, en déduire que : $a_{n+1} \sim a_n$
- Peut-on conclure avec la règle de d'Alembert sur la nature de la série $\sum a_n$?
- Démontrer que la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ où $b_n = n(n+1)(n+2)a_n a_{n-1}$ est suite constante.
- En déduire que $a_n^2 \sim \frac{\pi}{2n^3}$ et conclure sur la nature de la série $\sum a_n$

- On considère l'équation différentielle $(E_1) : \text{sh}(t)y' - \text{ch}(t)y = 1$
 - Vérifier que $f = [t \mapsto -\text{ch}(t)]$ est une solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$
 - Résoudre (E_1) sur un intervalle I qui est inclus dans $\mathbb{R}^*$
 - Déterminer toutes les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$
- On considère l'équation différentielle $(E_2) : (1+x^2)y'' + 4xy' + \frac{1+2x^2}{1+x^2}y = 0$
 - Vérifier que la fonction $h = \left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right]$ est une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.
 - Résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}$
- Soit (E_3) l'équation différentielle $x^2 y'' - 5x y' + 9y = x + 1$
 - Déterminer une solution P polynomiale et non nulle de (E_3) sur $\mathbb{R}$
 - Résoudre l'équation $z'' - 6z' + 9z = 0$
 - I est l'un des intervalle $]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$. Pour résoudre l'équation homogène associée à (E_3) , on pose $t = \ln|x|$. Sur quel intervalle varie la nouvelle variable t ?
Calculer les dérivées première et seconde de $y(x) = z(\ln|x|)$ à l'aide des dérivée première et seconde de z lorsque z est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis justifier que :
 y est solution homogène de (E_3) sur $I \Leftrightarrow z$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $z'' - 6z' + 9z = 0$
 - Déterminer les solutions de (E_3) sur I lorsque I est l'un des intervalle $]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$.
On ne demande pas de rechercher les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$!