PT 2025-2026 : Correction du DS n° 2

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE DU COURS **Durée conseillée 45min-1h**

Dans ces exercices, le plan usuel de la géométrie est muni d'un repère orthonormal $\mathscr{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. On considère une courbe paramétrée $\left[t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right]$ associée au tableau de variation suivant :

t	0		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
x	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{5}{2}$	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

a. Justifier, à l'aide des informations du tableau, que la courbe possède un point stationnaire. Préciser ses coordonnées.
On admet qu'en ce point la tangente est horizontale et que c'est un point de rebroussement de première espèce.

La courbe possède un point stationnaire lorsque les deux dérivées s'annulent en même temps.
Ici, $\boxed{\text{on repère un point seul stationnaire pour le paramètre } t = 0 \text{ qui est le point } M(0) \text{ de coordonnées } (1,0)}$

b. Justifier, à l'aide des informations du tableau, que la courbe possède une asymptote verticale.
Y-a-t-il une autre branche infinie à étudier?

On repère que $\begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \\ y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \end{cases}$ donc $\boxed{\text{la courbe possède l'axe des abscisses pour asymptote verticale lorsque } t \to +\infty}$

On repère aussi que le point $M(t)$ part à l'infini lorsque t tend 1 aussi $\boxed{\text{il y a une branche infinie à étudier lorsque } t \to 1}$

c. On admet, que, lorsque h tend vers 0 : $x(1+h) = -\dfrac{1}{h} + \dfrac{3}{2} - h^3 + o(h^3)$ et $y(1+h) = -\dfrac{1}{h} - 3h^3 + o(h^3)$

Justifier alors que la courbe possède la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ pour asymptote

Prouver que $y(1+h) - x(1+h) + \frac{3}{2}$ a le signe de $-h$ au voisinage de 0.

Ces développements asymptotiques au voisinage de $t = 1$ permettent d'étudier la branche infinie lorsque $t \to 1$.

Ici, lorsque $h \to 0$: $x(1+h) = -\dfrac{1}{h} + o\left(\dfrac{1}{h}\right)$ et $y(1+h) = -\dfrac{1}{h} + o\left(\dfrac{1}{h}\right)$ donc : $x(1+h) \sim_0 -\dfrac{1}{h}$ et $y(1+h) \sim_0 -\dfrac{1}{h}$

Dés lors $\dfrac{y(1+h)}{x(1+h)} \sim_0 1 \Rightarrow \lim\limits_{t\to1} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{h\to0} \dfrac{y(1+h)}{x(1+h)} = 1$

Ensuite : $y(1+h) - x(1+h) = -\frac{3}{2} - 2h^3 + o(h^3)$ donc $\lim\limits_{t\to1} \Big(y(t) - x(t)\Big) = \lim\limits_{h\to0} \Big(y(1+h) - x(1+h)\Big) = -\dfrac{3}{2}$

On peut donc conclure que $\boxed{\text{la branche infinie lorsque } t \to 1 \text{ est une asymptote oblique d'équation } y = x - \frac{3}{2}}$

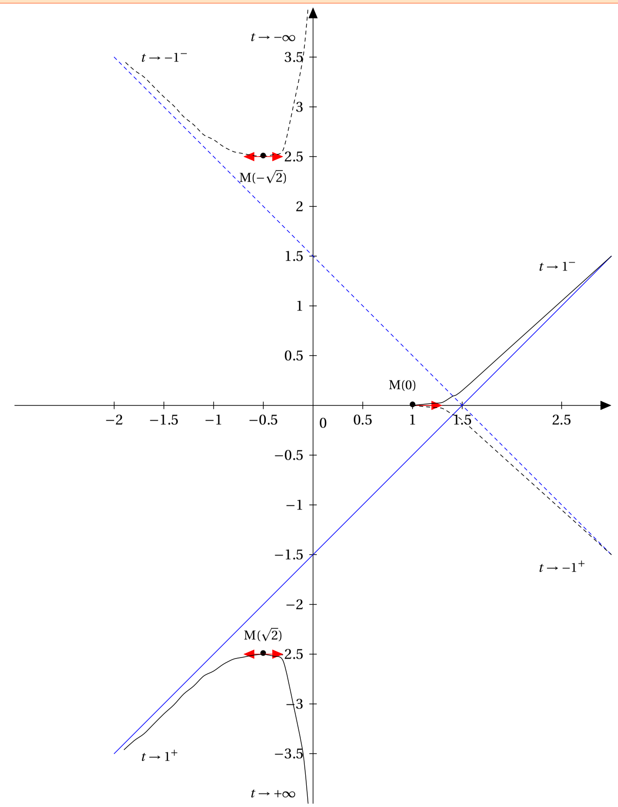
Enfin : $\boxed{y(1+h) - x(1+h) + \frac{3}{2} = -2h^3 + o(h^3) \sim_0 -2h^3 \quad \text{a le signe de } -2h^3 = -h \times \underbrace{2h^2}_{\geqslant 0} \text{ donc celui de } -h \text{ au voisinage de } 0.}$

d. Proposer le tracé (en trait plein) de la courbe associée à ce tableau en exploitant tous les résultats des questions précédentes pour préciser ce tracé.

La question *a*) permet de placer la tangente horizontale au point $M(0) = (1,0)$.
La question *b*) permet de placer une asymptote verticale au niveau de l'axe des abscisses et, en utilisant le tableau de variation, de positionner la courbe en bas à gauche.
La question *c*) permet de placer l'asymptote oblique d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ et de positionner la courbe par rapport à l'asymptote : elle est au dessus de l'asymptote lorsque $t \to 1^-$ et en dessous lorsque $t \to 1^+$
On repère dans le tableau le point $M(\sqrt{2})$ de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ où la tangente est horizontale.

e. Sachant que x est paire et y impaire, compléter (en trait pointillé) le tracé de la courbe.

Étant donné la parité de x et y, on sait que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses aussi on obtient la totalité du tracé sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ en appliquant cette symétrie à la courbe tracé pour $t \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$



2. On considère une courbe Γ paramétrée par la fonction vectorielle $\left[t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right]$ où

x et y sont des fonctions π périodiques avec x impaire, y paire et x et y vérifiant $\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t) \\ y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t) \end{cases}$ pour tout t réel.

Proposer un domaine d'étude D le plus petit possible pour Γ et préciser les transformations géométriques à réaliser pour obtenir la totalité de la courbe Γ à partir du tracé sur le domaine D.

Puisque x et y sont π périodique, il suffit de connaître la courbe sur un intervalle d'amplitude π.
Afin d'exploiter les propriétés de parité, on va utiliser un domaine centré en 0 soit $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Comme $\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}$, les points $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe $O + \mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$ des ordonnées.

et on remarque que $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ de sorte qu'une étude sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ suffira.

Comme $\begin{cases} x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t) \\ y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t) \end{cases}$, les points $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\mathscr{D}$: $y = x$

et $\dfrac{\frac{\pi}{2} - t + t}{2} = \dfrac{\pi}{4}$ et on remarque que : $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2} - t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ de sorte qu'une étude sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ suffira.

Finalement, $\boxed{\text{on trace la courbe sur le domaine } D = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]}$ puis on réalise une symétrie par rapport à $\mathscr{D}$: $y = x$ pour obtenir la courbe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On réalise ensuite une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées $O + \mathrm{Vect}(\vec{\jmath})$ pour obtenir la courbe sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Ce domaine est d'amplitude π aussi, par périodicité, on a obtenu toute la courbe Γ.

PROBLÈME N° 1 **Durée conseillée 45 min** *Fin de la partie II du sujet Banque PT de 2017 (sujet de 4h en 5 parties)*

Étude d'une courbe de Bézier dans le plan

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

On considère la courbe Γ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ y(t) = 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

1. Construire les tableaux de variations des fonctions x et y.

Les fonctions x et y sont polynômiales donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et :
$x'(t) = 6 - 18t + 12t^2 = 6(1 - 3t + 2t^2) = 6(t-1)(2t-1)$ s'annule en $\frac{1}{2}$ et 1
$y'(t) = 6 - 6t - 12t^2 = 6(1 - t - 2t^2) = 6(t+1)(-2t+1)$ s'annule en -1 et en $\frac{1}{2}$ et 1
En utilisant la règle des signes pour les expressions du second degré, on construit :

t	$-\infty$		-1		0.5		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	-19	↗	1.25	↘	1	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-5	↗	1.75	↘	-1	↘	$-\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	

$x(t) \sim_{\pm\infty} 4t^3 \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \pm\infty$
$x(-1) = -6 - 9 - 4 = -19$
$x(0.5) = 3 - 2.25 + 0.5 = 1.25$ et $x(1) = 6 - 9 + 4 = 1$

$y(t) \sim_{\pm\infty} -4t^3 \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \mp\infty$
$y(-1) = -6 - 3 + 4 = -5$
$y(0.5) = 3 - 0.75 - 0.5 = 1.75$ et $y(1) = 6 - 3 - 4 = -1$

2. Déterminer les points réguliers de Γ dont la tangente à Γ est horizontale ou verticale.

On cherche les points où l'une des dérivées s'annule (et une seulement car le point est régulier) dans le tableau :
- le point $M(-1)$ de coordonnées $(-19, -5)$ possède une tangente horizontale
- le point $M(1)$ de coordonnées $(1, -1)$ possède une tangente verticale

3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point de paramètre $t = 0$

Le point $M(0)$ de coordonnées $(0,0)$ est régulier donc sa tangente $\mathcal{T}_0$ est :

$$\mathcal{T}_0 = M(0) + \mathrm{Vect}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}(0)}{dt}\right) = O + \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}) = O + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

aussi $\mathcal{T}_0$ est la première bissectrice du plan d'équation $y = x$

4. Déterminer le point singulier de Γ. préciser sa nature ainsi que la tangente à Γ en ce point.

Le sujet utilise la notion de point singulier alors que le programme privilégie la notion de point stationnaire...
Le point est singulier lorsque les deux dérivées s'annulent en même temps aussi il y a un seul point singulier en $M(0.5)$ de coordonnées $(1.25, 1.75)$. Pour préciser l'allure du point, il faut calculer les dérivées successives en 0.5.

On réalise un DL à l'ordre 3 de $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ qu'on compare à la formule de Taylor-Young

$x(0.5+h) = 3 + 6h - 9(0.25 + h + h^2) + 4(1/8 + 3/4h + 3/2h^2 + h^3) = 1.25 - 3h^2 + 4h^3$
$y(0.5+h) = 3 + 6h - 3(0.25 + h + h^2) - 4(1/8 + 3/4h + 3/2h^2 + h^3) = 1.75 - 9h^2 - 4h^3$

$$\begin{pmatrix} x(0.5+h) \\ y(0.5+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.75 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + h^2 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix}}_{\text{p=2}} + h^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\text{non colinéaire à la dérivée précente, q=3}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ici, $o(h^3) = 0$ dans les 2 cas

On a donc : $\boxed{p = 2, q = 3 \text{ et le point singulier est un point de rebroussement de première espèce}}$

de plus : $\boxed{\text{la tangente est la droite } M(0.5) + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)}$ car elle est dirigée par la première dérivée non nulle.

5. Donner la nature des branches infinies de Γ. Illustrer la réponse par un schéma sur la copie.

Il y a deux branches infinies en $+\infty$ et en $-\infty$. On a :

$$\frac{y(t)}{x(t)} \sim_{\pm\infty} \frac{-4t^3}{4t^3} = -1 \quad \text{et} \quad y(t) + x(t) = 12t - 12t^2 \sim_{\pm\infty} -12t^2 \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} -\infty$$

Ainsi, les deux branches infinies sont des branches paraboliques dans la direction de la droite $y = -x$
On dessine la droite $y = -x$, on positionne la courbe dans le bon quart de plan à l'aide des limites des coordonnées puis par rapport à la direction asymptotique grâce au signe de $y(t) + x(t) < 0$: la courbe est toujours sous la droite d'équation $y = -x$!

6. Tracer dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la restriction de la courbe Γ pour $t \in [0,1]$ ainsi que les tangentes aux points remarquables à Γ obtenues aux questions précédentes. Il est conseillé de prendre une unité de 6 cm.

PROBLÈME N° 2 **Durée conseillé 1h15-1h30**

Première des 3 parties de l'épreuve MPSI du concours ENSTIM (Petites Mines) de 2006 d'une durée de 2h

Dans tout le problème, on adopte la notation $\ln^k(x)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$) comme écriture simplifiée du nombre réel $(\ln(x))^k$ et, par convention, on pose : $\ln^0(x) = 1$ (y compris si $x = 1$)

Pour tout nombre réel strictement positif t, on pose : $x(t) = t\ln^3(t)$ et $y(t) = t\ln^2(t)$.
On pose également $x(0) = y(0) = \lambda \in \mathbb{R}$.
On souhaite étudier la courbe paramétrée associée à l'application $f : t \mapsto (x(t), y(t))$.
Le plan usuel de la géométrie est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M(t)$ du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$ lorsque t décrit $\mathbb{R}_+$.

1. Pour quelle valeur de λ les fonctions x et y sont-elles continues en 0?

D'après les résultats de croissances comparées, on sait que $x(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ et $y(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$

aussi, $\boxed{\text{pour que } x \text{ et } y \text{ soient continues en 0, il faut et il suffit que } \lambda = x(0) = y(0) = 0}$

On suppose dans la suite que λ prend cette valeur.

2. Déterminer, sur $]0, +\infty[$, les fonctions dérivées x' et y'. Justifier alors les tableaux de signes suivants :

t	0		a		1		$+\infty$
$x'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	

et

t	0		b		1		$+\infty$
$y'(t)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

où a et b sont des réels à préciser ($a < b$)

Par les théorèmes usuels, x et y sont clairement de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall t > 0, \quad x'(t) = \ln^3(t) + t \times \frac{1}{t} \times 3\ln^2(t) = \ln^2(t) \times (\ln(t) + 3) \quad \text{et, de même,} \quad y'(t) = \ln(t) \times (\ln(t) + 2)$$

- $x'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln^2(t) = 0$ ou $\ln(t) = -3 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = e^{-3}$
- $y'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln(t) = 0$ ou $\ln(t) = -2 \Leftrightarrow t = 1$ ou $t = e^{-2}$
- $x'(t)$ a le signe de $\ln(t) + 3$ car $\ln^2(t) \geq 0$

t	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$\ln(t)$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(t)+2$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$y'(t)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

t	0		e^{-3}		1		$+\infty$
$x'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	

3. Donner dans un même tableau les variations des deux fonctions x et y.
Dans ce tableau devront figurer les limites aux bornes, ainsi que les valeurs de x et y aux points particuliers.
Ces valeurs seront données sous l'une des trois formes suivantes : n, $\frac{n}{e^2}$ ou bien $\frac{n}{e^3}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.
On précisera également les points $M(t)$ qui sont réguliers avec une tangente parallèle à l'un des axes du repère $\mathcal{R}$.

Dressons alors le tableau des variations communes de x et y :

- Limites aux bornes :
$x(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $y(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par la question 1
$x(t) \xrightarrow[t\to +\infty]{} +\infty$ et $y(t) \xrightarrow[t\to +\infty]{} +\infty$ par limites usuelles

- Valeurs remarquables : $x(1) = y(1) = 0$

$x(e^{-3}) = \frac{1}{e^3} \times (-3)^3 = \frac{-27}{e^3} \simeq -1,35$

$x(e^{-2}) = \frac{1}{e^2} \times (-2)^3 = \frac{-8}{e^2} \simeq -1,12$

$y(e^{-3}) = \frac{1}{e^3} \times (-3)^2 = \frac{9}{e^3} \simeq 0,45$

$y(e^{-2}) = \frac{1}{e^2} \times (-2)^2 = \frac{4}{e^2} \simeq 0,56$

en utilisant les données $e^{-2} \simeq 0,14$ et $e^{-3} \simeq 0,05$

t	0		$\frac{1}{e^3}$		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$x'(t)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	0	$+$	
x	0	↘	$\frac{-27}{e^3}$	↗	$\frac{-8}{e^2}$	↗	0	↗	$+\infty$
y	0	↗	$\frac{9}{e^3}$	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗	$+\infty$
$y'(t)$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On cherche les points $M(t)$ où l'une des dérivées $x'(t)$ ou $y'(t)$ s'annule (et une seulement car point régulier) :

$\boxed{\text{si } a = \frac{1}{e^3} \text{ et } b = \frac{1}{e^2}, \text{ la tangente à la courbe en } M_a \text{ est verticale et la tangente à la courbe en } M_b \text{ est horizontale}}$

On remarque aussi dans ce tableau : un point stationnaire pour $t = 1$ (étudié en question 4), un point limite pour $t \to 0^+$ (étudié en question 5) et une branche infinie (étudiée en question 5) pour $t \to +\infty$

4. Montrer que, lorsque le nombre réel u est au voisinage de 0, on a :

$$x(1+u) \sim u^3 \qquad \text{et} \qquad y(1+u) = u^2 + o(u^3)$$

En déduire la nature de l'unique point stationnaire de la courbe On précisera la tangente en ce point.

On se place au voisinage du paramètre $t=1$ aussi on pose $\quad t = 1+u \quad$ de sorte que $\quad t \to 1 \Leftrightarrow u \to 0$:

$$x(1+u) = (1+u)\Big(\ln(1+u)\Big)^3 \sim_0 1 \times u^3 \quad \text{car} \left\{ \begin{array}{l} \ln(1+u) \sim_0 u \\ 1+u \sim_0 1 \end{array} \right. \quad \text{et donc} \quad \boxed{x(1+u) \sim_0 u^3}$$

$$\begin{array}{rcll} y(1+u) = (1+u)\Big(\ln(1+u)\Big)^2 & = & (1+u)\Big(u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)\Big)^2 & \text{en utilisant le } DL_2 \text{ en 0 de } \ln(1+u) \\ & = & (1+u)\Big(u^2 - 2 \times u \times \frac{u^2}{2} + o(u^3)\Big) & \text{en ne gardant que les termes de degré} \leq 3 \text{ dans le produit} \\ & = & u^2 - u^3 + u^3 + o(u^3) \quad \text{et donc} & \boxed{y(1+u) =_0 u^2 + o(u^3)} \end{array}$$

On a vu qu'il y a un unique point stationnaire pour cette courbe en $t=1$ (seule valeur du paramètre t où $x'(t) = y'(t) = 0$)
Pour préciser la nature de ce point singulier M_1, on réalise un développement limité commun de x et y en $t=1$
ou autrement dit un DL commun en 0 de $x(1+u)$ et $y(1+u)$. En utilisant la définition des équivalents, on a :

$$x(1+u) =_0 u^3 + o(u^3) \quad \text{et } y(1+u) =_0 u^2 + o(u^3)$$

$$\text{aussi} \quad f(1+u) = \begin{pmatrix} x(1+u) \\ y(1+u) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=f(1)} + u \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=f'(1)} + \frac{u^2}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=f''(1)} + \frac{u^3}{3!} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=f^{(3)}(1)} + \begin{pmatrix} o(u^3) \\ o(u^3) \end{pmatrix}$$

La première dérivée non nulle de f est $f''(1)$ donc la tangente est verticale et $p=2$. La dérivée suivante non colinéaire est $f^{(3)}(1)$ d'où $q=3$

$\boxed{M_1(0,0) \text{ est donc d'un point de rebroussement de première espèce à tangente verticale}}$

5. Déterminer les limites lorsque t tend vers $+\infty$ puis vers 0 (à droite) de la fonction $\left[t \mapsto \dfrac{y(t)}{x(t)}\right]$

Conclure quant à la nature de la branche infinie de la courbe ainsi que sur l'existence d'une demi-tangente à la courbe au point de paramètre $t=0$.

On étudie les limites en $+\infty$ et en 0 du quotient $\quad \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t\ln^2(t)}{t\ln^3(t)} = \dfrac{1}{\ln t}$

- Comme $\quad \ln(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \quad$ on a $\quad \boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0}$

  Cela nous permet de conclure sur la nature de la branche infinie lorsque t tend vers $+\infty$,

  $\boxed{\text{la courbe possède une branche parabolique dans la direction de l'axe } (O, \vec{\imath}) \text{ lorsque } t \text{ tend vers } +\infty}$

- Comme $\quad \ln(t) \xrightarrow[t\to0^+]{} -\infty \quad$ on a $\quad \boxed{\lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0}$

  Autrement dit $\quad \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{y(t)-y(0)}{x(t)-x(0)} = 0 \quad$ et donc on peut conclure, par limite de la pente des cordes, que

  $\boxed{\text{la courbe présente au point limite } M_0(0,0) \text{ lorsque } t \text{ tend vers 0 une tangente horizontale}}$ (de pente nulle)

6. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = x$

Soit Δ la droite d'équation $y = x$ et $\mathscr{C}$

$$\begin{array}{rcl} M(x,y) \in \mathscr{C} \cap \Delta & \Leftrightarrow & \exists t \in [0,+\infty[, \quad x = x(t),\ y = y(t) \quad \text{et} \quad x = y \\ & \Leftrightarrow & \exists t \in [0,+\infty[, \quad x = x(t),\ y = y(t) \quad \text{et} \quad x(t) = y(t) \end{array}$$

Or : $\quad y(t) - x(t) = t\ln^3(t) - t\ln^2(t) = t\ln^2(t) \times (\ln(t) - 1)$

donc : $\quad y(t) - x(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \quad \text{ou} \quad \ln^2(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \ln(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0 \quad \text{ou} \quad t = 1 \quad \text{ou} \quad t = e$

Il y a donc trois points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = x$ pour les paramètres $t=0$, $t=1$ et $t=e$:
il s'agit des points $M(0)\ (0,0)$, $\quad M(1)\ (0,0) \quad$ et $M(e)\ (e,e)$

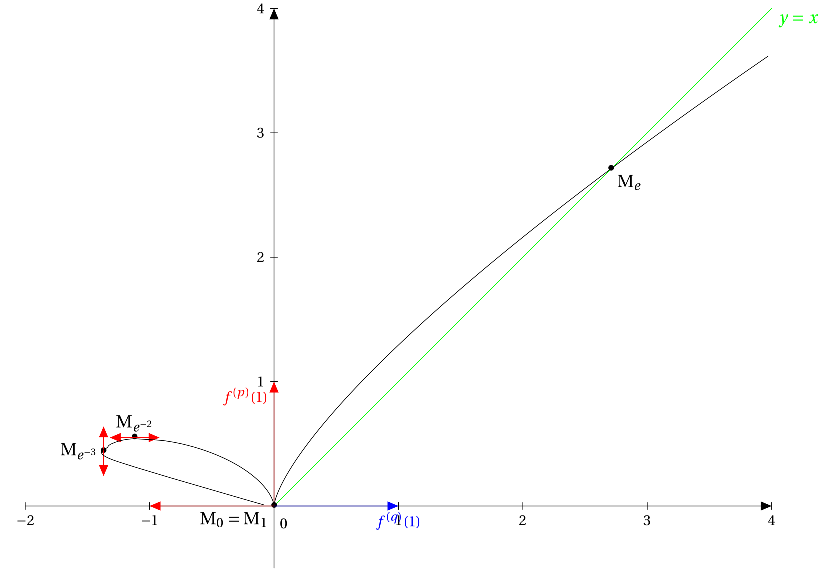
7. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ en mettant en évidence les éléments rencontrés dans cette étude.

On prendra pour unité graphique 4 cm et on donne les valeurs approchées : $e^{-2} \simeq 0,14$ et $e^{-3} \simeq 0,05$

Pour placer les points : $40mm$ représente 1 donc $4mm$ représente 0.1 et $2mm$ représente 0.05
$x\big(e^{-3}\big) \simeq -27 \times 0.05 \simeq -\big(26 \times 0.05 + 0.05\big) \simeq -\big(13 \times 0.1 + 0.05\big) \simeq -1,35$
$y\big(e^{-3}\big) \simeq 9 \times 0.05 \simeq 10 \times 0.05 - 0.05 \simeq 0,5 - 0.05 \simeq 0.45$
$x(e^{-2}) \simeq -8 \times 0.14 = -\ big(10 \times 0.14 - 2 \times 0.14) \simeq -(1,4 - 0.28) \simeq -1,12$
$y(e^{-2}) \simeq 4 \times 0.14 \simeq 4 \times 0.1 + 4 \times 0.04 \simeq 0.4 + 0.16 \simeq 0.56 \qquad$ Enfin : $y(e) = x(e) = e \simeq 2,7$

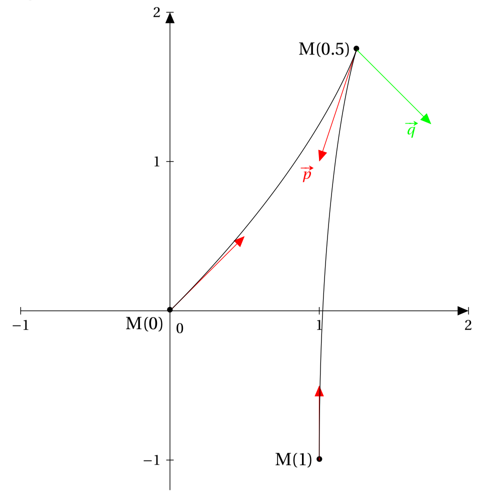
Courbe du problème n^o 2

L'unité graphique utilisée ici est 2,5 cm et pas 4 cm comme demandé par le sujet.



Courbe du problème n^o 1

Attention ! L'unité graphique utilisée ici est 3 cm et pas 6 cm comme demandé par le sujet.



Remarques générales suite à la correction

Un devoir bien réussi : je termine avec une moyenne de 10,4 et une médiane à 10,7 en notant sur 20. Pour rappel, les moyennes d'épreuves sont en général entre 9 et 9,5 et, en général, pour atteindre cette moyenne, je dois noter sur plus de 20...
Les notes vont de 3,2 à 17,9 avec un écart-type de 4. En terme de répartition :
- 7 très bonnes copies (entre 13.8 et 15.9) et une excellente à 17,9
- 8 bonnes copies (entre 10,5 et 12.9)
- 2 copies justes qui serait autour de la moyenne d'épreuve (8,5 et 9,5)
Le 9 copies restantes réalisent des performances insuffisantes (3 copies entre 6,4 et 7,7), inquiétantes (6 copies <6)

Au début de chacun des sujets du concours, on trouve l'avertissement suivant où certains mots ont été mis en évidence en gras par l'organisation du concours :

« La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. »

Il s'agit donc dés à présent de prendre de bonnes habitudes :
- on aère et on évite "les pattes de mouches" illisibles ;
- on organise sa copie (bien numéroter ses réponses pour éviter un jeu de piste qui va énerver le correcteur) quitte à laisser de la place pour revenir plus tard. Je vous conseille d'entamer une nouvelle copie pour chaque nouvelle partie par exemple ;
- on encadre ses réponses. Le surligneur (vert ou bleu) permet de faire cela de façon rapide et efficace ;
- pas de rature rageuse mais on barre éventuellement à la règle.
- on proscrit les abréviations sauf à les définir dans la copie.
- on fait attention au SENS de ce que l'on écrit, à la bonne utilisation des symboles et d'un vocabulaire adapté.

Le jury banque PT annonce réserver 2 points sur les 20 points au respect de ces consignes : c'est énorme ! Pour vous aidez à vous repérer, je corrige et pénalise en vert les erreurs liées à ces consignes dans vos copies. Pour le moment, je n'ai pénalisé que les fautes de SENS mais, à l'avenir, je pénaliserai également l'organisation et le soin.

Remarques suite à la correction des applications du cours

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE DU COURS

1. a. Question bien traitée par tous.

   b. Des confusions entre asymptote et tangente...Il est implicitement demandé de donner l'asymptote ici l'axe (Oy) ou $O+\mathrm{Vect}(\vec{j})$ (tout autre notation de votre invention est à bannir pour nommer cet axe...). De même, il faut justifier la présence d'une branche infinie par le fait que le point $M(t)$ s'éloigne à l'infini.

   c. Dans cette question, on étudiait la situation près de 1 : c'est donc l'étude d'une branche infinie qu'il faut conduire...pas une étude de point stationnaire avec un DL vectoriel...
   D'ailleurs, dans le sujet, x et y sont précisés par des développements asymptotiques au voisinage de 1 ($t=1+h$ avec h voisin de 0) pas des développements limités (présence de premier terme en $-\frac{1}{h}$.
   Ces développement permettent alors de mettre en œuvre la méthodologie du cours pour repérer une asymptote : on justifie, à l'aide d'équivalents, les différentes limites
   $$\lim_{t\to 1}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{h\to 0}\frac{y(1+h)}{x(1+h)}=1 \quad\text{puis}\quad \lim_{t\to 1}\Big(y(t)-x(t)\Big)=\lim_{h\to 0}\Big(y(1+h)-x(1+h)\Big)=-\frac{3}{2}$$
   Vos rédactions sont encore bien souvent très maladroites :
   - dire $x(1+h)\sim_0 -\dfrac{1}{h}+\dfrac{3}{2}$ n'a pas plus de valeur que dire $x(1+h)\sim_0 -\dfrac{1}{h}+h$ ou $x(1+h)\sim_0 -\dfrac{1}{h}+\sin h$
   En effet, le $\dfrac{3}{2}$ n'a aucune valeur dans l'équivalent car $\dfrac{3}{2}=_0 o\left(\dfrac{1}{h}\right)$ (et aussi $h=_0 o\left(\dfrac{1}{h}\right)$ et $\sin h\sim_0 h=_0 o\left(\dfrac{1}{h}\right)$
   Tout ces équivalents peuvent être écrits mais seul le terme en $-\dfrac{1}{h}$ a une vrai valeur d'où la préférence pour : $x(1+h)\sim_0 -\dfrac{1}{h}$
   - les $o(h^3)$ disparaissent de vos égalités sans passage par un équivalent : $f(x)\sim g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+o\big(g(x)\big)$ permet de passer de l'égalité à l'équivalent aussi $y(1+h)-x(1+h)+\frac{3}{2}=-2h^3+o(h^3)\sim -2h^3$ mais pas $=-2h^3$!
   Attention au simplification abusive : $o(h^3)-o(h^3)$ vaut $o(h^3)$ car $o(h^3)-o(h^3)=h^3\varepsilon_1(h)-h^3\varepsilon_2(h)=h^3\varepsilon_3$ où $\varepsilon_i(h)\xrightarrow[h\to 0]{} 0$ avec $\varepsilon_3(h)=\varepsilon_1(h)-\varepsilon_2(h)$ qui n'a aucune raison d'être nulle

   d. Le tracé est en général bien fait. **Les unités sur le repère et les noms des points doivent être indiqués** : le correcteur n'a pas à les deviner...Dommage que certains oublient de marquer les tangentes et que d'autres peinent à tracer une droite (erreur sur la pente ou l'ordonnée à l'origine)...

   e. On demande un tracé en pointillé alors on dessine en pointillé (respect des consigne) !
   Le tracé ne suffit pas : il faut le justifier en expliquant l'origine de la symétrie.

2. Cette deuxième question a été beaucoup moins bien réussi que la première.
   La construction géométrique finale résumant comment vous construisez la courbe à partir du tracé sur le domaine d'étude en explicitant l'ordre précis des transformations géométriques à faire a rarement été bien fait.
   Beaucoup d'entre vous ont raconté des bêtises sur la périodicité confondant la situation des courbes paramétrées avec celle des courbes représentatives. J'avais pourtant insisté sur ce point en classe !

Examinons les deux situations :
- une courbe représentative d'équation $y=f(x)$ où f est π périodique
- une courbe paramétrée $\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ où x et y sont toutes les deux π périodiques

Dans le cas de la courbe paramétrée, on a $\begin{cases} x(t+\pi)=x(t)\\ y(t+\pi)=y(t)\end{cases}$ donc les points $M(t+\pi)$ et $M(t)$ sont confondus aussi, si on connaît la courbe sur $[a,a+\pi]$, alors on répète le même dessin sur $[a+\pi,a+2\pi]$, $[a+2\pi,a+3\pi]$, ... et aussi sur $[a-\pi,a]$, $[a-2\pi,a-\pi]$,.... C'est à dire qu'on repasse exactement sur la même courbe à chaque fois qu'on parcourt donc indéfiniment...

Dans le cas de la courbe représentative, on peut en obtenir un paramétrage $y=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases} x=t\\ y=f(t)\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. Cette fois $\begin{cases} x(t+\pi)=x(t)+\pi\\ y(t+\pi)=y(t)\end{cases}$ donc le point $M(t+\pi)$ est l'image de $M(t)$ par une translation de vecteur $\pi\vec{i}$. Ainsi, pour construire la courbe sur $[a+\pi,a+2\pi]$ à partir du dessin sur $[a,a+\pi]$, il faudra réaliser une translation de vecteur $\pi\vec{i}$. Et, plus globalement, il faudra réaliser des translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ où $k\in\mathbb{Z}$ pour tracer toute la courbe sur $\mathbb{R}$.

Remarques suite à la correction des applications du problème n° 1

Ce problème étant une partie d'un sujet maths B de 2017, on peut consulter rapport de l'écrit (consultable sur le site de la banque PT) auquel je vais faire référence par des extraits en italique dans la suite.

1. Extrait du rapport :
   « *Les tableaux de variations doivent être justifiés (parfois, nous n'avons même pas le calcul des dérivées!) : la factorisation ou la recherche des racines des dérivées étaient ici attendues. Par ailleurs les expressions* $6-6t-12t^2$ *et* $(t+1)(t-\frac{1}{2})$ *ont les mêmes racines mais pas le même signe et ne sont certainement pas égales.* »
   Sur vos copies, le calcul des dérivées est en général correct mais vous ne pensez pas, en général, à **factoriser** : le signe et les zéros de $6-18t+12t^2=6(1-3t+2t^2)$ sont ceux de $1-3t+2t^2$ et c'est quand même nettement plus simple au niveau calculatoire !
   Manifestement, cela a été assez général en 2017 comme le souligne le rapport :
   « *Signalons que le concepteur n'envisage pas de demander aux candidats de [...] placer dans un repère des points dont les coordonnées sont des polynômes en* $\dfrac{18+\sqrt{234}}{24}$, *il est donc conseillé aux candidats de ne pas insister avec ces valeurs et de reprendre leurs calculs.Par ailleurs, la factorisation de* $6-18t+12t^2$ *par* 6 *évitait des calculs de discriminants trop compliqués.* »
   Les erreurs sur le calcul des racines étaient lourdement pénalisantes pour toute la suite du sujet : il fallait donc prendre le temps de bien vérifier ses calculs !
2. Plutôt bien en général. Attention toutefois à **bien définir vos notations** : le correcteur n'a pas à deviner que $M(t)$ est le point de paramètre t quand ce n'est pas mentionné dans le sujet ni par vos soins...
3. Beaucoup de confusions entre courbe paramétrée et courbe représentative dans vos copies et cela semble aussi avoir été le cas en 2017 :
   « *On trouve aussi régulièrement[...] des confusions avec les courbes d'équation* $y=f(x)$ »
   Ici, il fallait évoquer que le point $M(0)$ est régulier donc que la tangente est la droite passant en $M(0)$ dirigée par $\begin{pmatrix} x'(0)\\ y'(0)\end{pmatrix}$.
   L'équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ est celle de la tangente à la courbe représentative $y=f(x)$ où $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$!
4. Extrait du rapport :
   « *On aimerait bien savoir pourquoi* $p=2$ *et* $q=3$. *Les candidats oublient souvent la tangente[..]. On rappelle qu'une tangente est une droite et non un vecteur (directeur) ou une pente. Les illustrations graphiques ont été appréciées.* »
   Quelques erreurs dans les DL (essentiellement de calcul) qui conduisent à des vecteurs tangents faux mais qui ne remettent pas en cause la compréhension et la méthodologie.
5. Extrait du rapport :
   « *Les calculs sont souvent ceux attendus, bien qu'il manque parfois les limites de* x *et* y *en* $+\infty$. *La conclusion régulièrement fausse et l'illustration graphique inexistante* »
   Bien souvent, vous proposez des arguments incomplets et vous mélangez les notions d'asymptotes et de branches paraboliques (dans le texte ou sur l'illustration graphique) !
6. Respecter et indiquer les unités ! Extrait du rapport :
   « *On recherche trop souvent les vecteurs* $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$ *qui, on le rappelle, sont de longueur une unité. Certains candidats ne graduent même pas les axes.[...] Il arrive que certaines courbes ne soient pas tangentes à leur tangente... Certains candidats semblent avoir des soucis pour placer des points dont une coordonnée est* $\frac{7}{4}$ *ou* $\frac{5}{4}$ »
   Attention, il ne fallait tracer la courbe que sur $[0,1]$! Il n'y avait donc pas de branches infinies à positionner mais uniquement le tracé entre les points $M(0)$ et $M(1)$. Il fallait bien sûr marquer les tangentes en ces points repérées aux question 2 et question 3. Il fallait aussi soigné l'allure au niveau du point $M(1/2)$ stationnaire/singulier étudié en question 4.
   Votre courbe doit absolument être cohérente avec vos calculs (même s'ils sont faux) ou avec les réponses données par les questions.