

DEVOIR SURVEILLÉ N° 2 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3h- La calculatrice n'est pas autorisée.

Ne pas écrire sur la première page de votre composition (sauf nom, prénom et présentation copie)
 Les problèmes sont indépendants. Utiliser des copies différentes pour chacun des problèmes.
 Le barème sera proportionnel au durée conseillée pour chacun des exercices ou problèmes.

EXERCICES D'APPLICATION DIRECTE DU COURS

Durée conseillée 45min-1h

Dans ces exercices, le plan usuel de la géométrie est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère une courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ associée au tableau de variation suivant :

t	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x'(t)$	0	+		+
x		$+\infty$		0
		$\nearrow$		$\nearrow$
	1		$-\infty$	
y		$+\infty$		$-\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$
	0		$-\infty$	
$y'(t)$	0	+	+	0
				-

- a. Justifier, à l'aide des informations du tableau, que la courbe possède un point stationnaire. Préciser ses coordonnées. On admet qu'en ce point la tangente est horizontale et que c'est un point de rebroussement de première espèce.
- b. Justifier, à l'aide des informations du tableau, que la courbe possède une asymptote verticale. Y-a-t-il une autre branche infinie à étudier?
- c. On admet, que, lorsque h tend vers 0 : $x(1+h) = -\frac{1}{h} + \frac{3}{2} - h^3 + o(h^3)$ et $y(1+h) = -\frac{1}{h} - 3h^3 + o(h^3)$
 Justifier alors que la courbe possède la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ pour asymptote
 Prouver que $y(1+h) - x(1+h) + \frac{3}{2}$ a le signe de $-h$ au voisinage de 0.
- d. Proposer le tracé (en trait plein) de la courbe associée à ce tableau en exploitant tous les résultats des questions précédentes pour préciser ce tracé.
- e. Sachant que x est paire et y impaire, compléter (en trait pointillé) le tracé de la courbe.

2. On considère une courbe Γ paramétrée par la fonction vectorielle $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ où

$$x \text{ et } y \text{ sont des fonctions } \pi \text{ périodiques avec } x \text{ impaire, } y \text{ paire et } x \text{ et } y \text{ vérifiant } \begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t) \end{cases} \text{ pour tout } t \text{ réel.}$$

Proposer un domaine d'étude D le plus petit possible pour Γ et préciser les transformations géométriques à réaliser pour obtenir la totalité de la courbe Γ à partir du tracé sur le domaine D .

Étude d'une courbe de Bézier dans le plan

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

On considère la courbe Γ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ y(t) = 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1. Construire les tableaux de variations des fonctions x et y .
2. Déterminer les points réguliers de Γ dont la tangente à Γ est horizontale ou verticale.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à Γ au point de paramètre $t = 0$
4. Déterminer le point singulier de Γ . préciser sa nature ainsi que la tangente à Γ en ce point.
5. Donner la nature des branches infinies de Γ . Illustrer la réponse par un schéma sur la copie.
6. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la restriction de la courbe Γ pour $t \in [0, 1]$ ainsi que les tangentes aux points remarquables à Γ obtenues aux questions précédentes. Il est conseillé de prendre une unité de 6 cm.

Première des 3 parties de l'épreuve MPSI du concours ENSTIM (Petites Mines) de 2006 d'une durée de 2h

Dans tout le problème, on adopte la notation $\ln^k(x)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$) comme écriture simplifiée du nombre réel $(\ln(x))^k$ et, par convention, on pose : $\ln^0(x) = 1$ (y compris si $x = 1$)

Pour tout nombre réel strictement positif t , on pose : $x(t) = t \ln^3(t)$ et $y(t) = t \ln^2(t)$.

On pose également $x(0) = y(0) = \lambda \in \mathbb{R}$.

On souhaite étudier la courbe paramétrée associée à l'application $f : t \mapsto (x(t), y(t))$.

Le plan usuel de la géométrie est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(t)$ du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$ lorsque t décrit $\mathbb{R}_+$.

1. Pour quelle valeur de λ les fonctions x et y sont-elles continues en 0?

On suppose dans la suite que λ prend cette valeur.

2. Déterminer, sur $]0, +\infty[$, les fonctions dérivées x' et y' . Justifier alors les tableaux de signes suivants :

t	0	a	1	$+\infty$
$x'(t)$		-	0	+

et

t	0	b	1	$+\infty$
$y'(t)$		+	0	-

où a et b sont des réels à préciser ($a < b$)

3. Donner dans un même tableau les variations des deux fonctions x et y .

Dans ce tableau devront figurer les limites aux bornes, ainsi que les valeurs de x et y aux points particuliers.

Ces valeurs seront données sous l'une des trois formes suivantes : n , $\frac{n}{e^2}$ ou bien $\frac{n}{e^3}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

On précisera également les points $M(t)$ qui sont réguliers avec une tangente parallèle à l'un des axes du repère $\mathcal{R}$.

4. Montrer que, lorsque le nombre réel u est au voisinage de 0, on a :

$$x(1+u) \sim u^3 \quad \text{et} \quad y(1+u) = u^2 + o(u^3)$$

En déduire la nature de l'unique point stationnaire de la courbe On précisera la tangente en ce point.

5. Déterminer les limites lorsque t tend vers $+\infty$ puis vers 0 (à droite) de la fonction $\left[t \mapsto \frac{y(t)}{x(t)} \right]$

Conclure quant à la nature de la branche infinie de la courbe ainsi que sur l'existence d'une demi-tangente à la courbe au point de paramètre $t = 0$.

6. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = x$

7. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ en mettant en évidence les éléments rencontrés dans cette étude.

On prendra pour unité graphique 4 cm et on donne les valeurs approchées : $e^{-2} \simeq 0,14$ et $e^{-3} \simeq 0,05$