

Nom :

Devoir surveillé n° 1 - 1 heure 30

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS :

1. Compléter :

• La fonction Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ d'image $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

• La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et d'image $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

• On sait que : $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$

• On sait aussi que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

2. Donner l'expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

L'équation caractéristique est : $r^2 = 6r - 9 \Leftrightarrow r^2 - 2 \times 3r + 3^2 = 0 \Leftrightarrow (r - 3)^2 = 0$

Il y a une racine double $r = 3$ donc : $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B) \times 3^n$

En utilisant les premiers termes : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ (A + B) \times 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = -B = -1 \end{cases}$ soit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (1 - n)3^n$

3. Donner l'expression de la solution de l'équation différentielle $y'' = -2y' - 4y$ Rappel : $-1 \pm i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

L'équation caractéristique est : $r^2 + 2r + 4 = 0$ de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 4 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$

Il y a deux racines conjuguées : $\frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$

L'expression de la solution est alors $y(t) = e^{-t}(A \cos(\sqrt{3}t) + B \sin(\sqrt{3}t))$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

4. Énoncer le théorème du rang pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis préciser l'image et le noyau de M.

$M \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ représente une application de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ de sorte que le théorème du rang s'écrit

$$\dim \operatorname{Ker} M + \operatorname{rg}(M) = \dim \mathbb{R}^4 \quad (\text{ou bien} \quad \dim \operatorname{Ker} M + \dim \operatorname{Im} (M) = \dim \mathbb{R}^4)$$

On note C_j la colonne j de la matrice M :

$\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4) =_{C_3=0} \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_4) =_{C_4=C_1+C_2} \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$ soit $\operatorname{Im} M = \{(a+b, b, -a+b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

De plus, puisque C_1 et C_2 sont non colinéaires : $\operatorname{rg}(M) = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} (M) = 4 - 2 = 2$

Il s'agit donc de trouver 2 vecteurs non colinéaire de $\operatorname{Ker} (M)$ pour obtenir une base de $\operatorname{Ker} M$ or :

$$C_3 = 0 \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \vec{u} = (0, 0, 1, 0) \in \operatorname{Ker} (M) \quad \text{et} \quad C_1 + C_2 - C_4 = 0 \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \vec{v} = (1, 1, 0, -1) \in \operatorname{Ker} (M)$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien non colinéaires donc : $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{(b, b, a, -b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

OU BIEN

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:
 $(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} M \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2t = 0 \\ y + t = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ t = -y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z, t) = y(1, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, 0)$ aussi :

$\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = (1, 1, 0, -1)$ et $\vec{v} = (0, 0, 1, 0)$ non colinéaires. De ce fait : $\dim \operatorname{Ker} M = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} M = 4 - 2 = 2$

On obtient une base de $\operatorname{Im} M$ si on trouve 2 vecteurs non colinéaire de $\operatorname{Im} M$ ce qu'on obtient avec les colonnes :

$$C_1 = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} M, C_2 = M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} M \text{ et } (C_1, C_2) \text{ libre donc } \operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$$

5. On connaît partiellement la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & 0 & 1 \\ ? & 1 & 0 \end{pmatrix}$ entre deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$

a. Sachant que $e'_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ et que e'_2 et e'_3 sont dans le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(e_2, e_3)$, compléter la matrice P.

Par définition : $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ autrement dit les colonnes de P donnent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

La relation $e'_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ permet d'obtenir la première colonne de P puisque e'_1 a pour coordonnées (1, 2, 3)

Le fait que e'_2 et e'_3 sont dans le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(e_2, e_3)$ indique que e'_2 et e'_3 n'ont pas de coordonnées selon e_1 ce qui permet d'affirmer que P a des coefficients nuls sur la première ligne aux colonnes 2 et 3.

En définitive :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b. On appelle Q la matrice de passage entre deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^4$.

Si M est la matrice d'une application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$, exprimer à l'aide d'une égalité matricielle la matrice N de f relativement aux bases $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{B}'$.

Attention : $Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$ (bases dans l'espace de départ!) et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ bases dans l'espace d'arrivée!

La relation de changement de bases entre $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f)$ et $N = \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{B}'}(f)$ s'écrit : $N = P^{-1}MQ$

EXERCICE : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ associé à $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

1. Justifier que f est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ associé à la matrice A qui vérifie $A^2 = A$ (à faire) aussi $f \circ f = f$ et donc on sait que f est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$

2. Justifier que $P = -X^2 + 5X - 3$ est dans le noyau de f . L'application f est-elle injective?

Les coordonnées de P dans $\mathcal{B}_{can} = (1, X, X^2)$ sont $X_P = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ aussi les coordonnées de $f(P)$ sont $AX_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de sorte que : $f(P) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \Leftrightarrow P \in \text{Ker } f$. Mais puisque $P \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ alors $\text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\} \Leftrightarrow f$ n'est pas injective.

3. Écrire le théorème du rang pour f . Justifier, à l'aide de la question 1, que $\text{rg}(f) \leq 2$. L'application f est-elle surjective?

Le théorème du rang s'écrit : $\dim \text{Ker } f + \text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$

La question 1 assure que $\dim \text{Ker } f \geq 1$ aussi : $3 - \dim \text{Ker } f \leq 2 \Leftrightarrow \text{rg}(f) \leq 2$

Puisque $\dim \text{Im } f = \text{rg}(f) \leq 2$, $\dim \text{Im } f \neq 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ et donc $\text{Im } f \neq \mathbb{R}_2[X] \Leftrightarrow f$ n'est pas surjective

4. Justifier que $\text{rg}(f) = 2$, expliciter alors sans calcul $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$

Notons c_1, c_2, c_3 les colonnes de A . Les colonnes c_2 et c_3 sont non colinéaires donc $\text{rg } f \geq 2$ et donc, puisque $\text{rg } f \leq 2$ (question 2), on peut conclure que : $\text{rg } f = 2$

On obtient une base de $\text{Im } f$ si on trouve deux vecteurs de $\text{Im } f$ non colinéaires. Les colonnes c_2 et c_3 de A donnent les coordonnées de $f(X)$ et $f(X^2)$ qui sont ainsi deux vecteurs de $\text{Im } f$ non colinéaires.

Ainsi : $\text{Im } f = \text{Vect}(-3 + 6X - X^2, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$

En outre, le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } f = 1$ de sorte que le vecteur P non nul de $\text{Ker } f$ trouvé en 1 en donne une base : $\text{Ker } f = \text{Vect}(P)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$

5. Donner la matrice B canoniquement associée à $g = f - id$. Quel est son rang? En déduire la dimension du noyau de g .

Trouver un polynôme Q de degré 1 et un polynôme R de degré 2 qui sont dans $\text{Ker } g = \text{Ker } (f - id)$

(On prendra un coefficient constant positif pour Q et R sera unitaire c-à-d de coefficient dominant égal à 1)

$g = f - id$ est canoniquement associée à $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = B$.

Les deux premières colonnes de B sont colinéaires et la troisième est nulle donc $\text{rg}(B) = 1$

On sait que $\text{rg}(g) = \text{rg}(B)$ et, en utilisant le théorème du rang :

$\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \text{Ker } g + \text{rg}(g) \Rightarrow \dim \text{Ker } g = \dim \mathbb{R}_2[X] - \text{rg}(g) = 3 - 1$ soit $\dim \text{Ker } g = 2$

De plus : $B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on en déduit que : $g(Q) = 0$ où $Q = 1 - 2X + 0 \times X^2$ coeff constant = 1 ≥ 0

et aussi que : $g(R) = 0$ où $R = X^2$ polynôme unitaire.

Finalement : $Q = 1 - 2X \in \text{Ker } g = \text{Ker } (f - id)$ et $R = X^2 \in \text{Ker } g = \text{Ker } (f - id)$

6. Justifier que (Q, R) est une base de l'image de f .

Méthode 1 Puisque f est un projecteur, on sait que $\text{Im } f = \text{Ker } (f - id)$. On sait aussi que cet espace est de dimension 2 (question 4) et aussi que la famille (Q, R) est une famille de vecteurs de cet espace (question 5). De plus, cette famille est libre (polynôme de degré distincts d'après question 5). Aussi, (Q, R) est bien une base de $\text{Im } f = \text{Ker } (f - id)$.

Méthode 2 On sait que $R = X^2 \in \text{Im } f$ (question 4) et que $Q = 1 - 2X = -\frac{1}{3}(-3X + 6X - X^2) - \frac{1}{3}X^2 \in \text{Im } f = \text{Vect}(-3 + 6X - X^2, X^2)$ aussi (Q, R) est une famille libre (polynôme de degré distincts) de $\text{Im } f$ avec $\text{Card}(Q, R) = 2 = \dim \text{Im } f$ (question 4) de sorte que (Q, R) est bien une base de $\text{Im } f$

7. Prouver que $\mathcal{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

La question peut être traitée même sans connaître Q et R en admettant le résultat des questions précédentes

Méthode 1 Comme f est un projecteur, on sait que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}_2[X]$ aussi la famille (P, Q, R) obtenue en concaténant la base (P) de $\text{Ker } f$ et la base (Q, R) de $\text{Im } f$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Méthode 2 et 3 Comme $\text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim_{\mathbb{R}_2}[X]$, il s'agit de démontrer que $\mathcal{B}'$ est une famille libre.

(pour les 5/2 pour l'instant) : $\det_{\mathcal{B}_{can}}(P; Q; R) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times -2 - 5 \times 1 = 1 \neq 0$ donc (P, Q, R) est libre

(pour tous) En revenant à la définition de l'indépendance linéaire :

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha P + \beta Q + \gamma R = 0 \Leftrightarrow (-3\alpha + \beta) + (5\alpha - 2\beta)X + (\alpha + \gamma)X^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha + \beta = 0 \\ 5\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\alpha = 0 \\ \beta = -5\alpha \\ \gamma = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

8. On rappelle que f est un projecteur. Donner sans calcul les coordonnées de $f(Q)$ et de $f(R)$ dans $\mathcal{B}'$.

En déduire, sans calcul, la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$

La question peut être traitée même sans connaître Q et R en admettant le résultat des questions précédentes

On a : $Q \in \text{Ker}(f - id) \Leftrightarrow f(Q) - Q = 0 \Leftrightarrow f(Q) = Q$ donc $f(Q)$ a pour coordonnées $X'_Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$

et : $R \in \text{Ker}(f - id) \Leftrightarrow f(R) - R = 0 \Leftrightarrow f(R) = R$ donc $f(R)$ a pour coordonnées $X'_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$

Mais alors : $\begin{cases} f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ f(Q) = Q \\ f(R) = R \end{cases} \Rightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(P), f(Q), f(R)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$

9. Vérifier que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est $N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode 1 : On connaît facilement la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ qui est $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P, Q, R) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est alors M^{-1} or on vérifie que :

$$M \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{donc} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(1, X, X^2) = M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = N$$

Méthode 2 : Il s'agit de vérifier que $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(1, X, X^2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ autrement dit que

1 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$ soit que $-2P - 5Q - 2R = 1$ or $-2P - 5Q - 2R = -2(-X^2 + 5X - 3) - 5(1 - 2X) - 2X^2 = 1$

De même, on vérifie : $-P - 3Q - R = X$ et $R = X^2$ pour vérifier les deux autres colonnes de N

10. Donner une relation matricielle liant les matrices A et A' faisant intervenir la matrice N et son inverse.

En notant M la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a : $A' = M^{-1}AM$. Or, on sait que $N = M^{-1}$ donc $A' = NAN^{-1}$

Bilan global : Moyenne 11,4 Médiane 11.5 Max : 18.5 Min : 3.75 Ecart-type : 4,32

Un groupe de 11 bonnes copies (notes > 14) où le cours est assez bien maîtrisé et qui sont enthousiasmantes pour la suite.

Un groupe de 3 copies encourageante (11,5 < notes < 12.75) : on sent que les notions du cours ont été travaillé, il manque encore de recul et de rapidité mais c'est sur la bonne voie pour la suite.

Un groupe de 6 copies en retrait (8,5 < notes < 9,5) sans être catastrophique où il y a des notions de cours à reprendre et beaucoup d'erreurs d'attention pénalisantes.

Enfin, un groupe de 7 copies plus inquiétantes (notes < 7,5) où les notions de cours comme les méthode doivent être reprises et retravailler.

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS :

1. Il était possible de récupérer 2 points si tout était juste : j'ai retiré 0.25 par erreur.

Certains ne savent pas déterminer des valeurs remarquable alors qu'il s'agit d'utiliser le cercle trigonométrique. La valeur de $\text{Arcsin} \frac{\sqrt{3}}{2}$ correspond à l'angle dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour lequel le sinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, c'est donc $\frac{\pi}{3}$. Je rappelle que la tangente se lit sur la tangente au point (1,0) au cercle unité : une tangente égale à 1 s'obtient lorsque l'angle entre $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vaut $\frac{\pi}{4}$.

De nombreuses erreurs également dans la dérivée de Arcsin : elle n'existe que pour les $x \in]-1, 1[$ (ouvert) puisque $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ n'a d'existence que lorsque $1 - x^2 > 0$

2. Plutôt bien fait en général sauf insuffisance sur le cours...

3. Plutôt bien fait en général sauf insuffisance sur le cours...

4. Vous devez commencer votre réponse à la question par l'écriture du théorème du rang!

C'est maladroit d'obliger le correcteur à le rechercher au milieu d'un tas de calculs...

J'ai eu droit au lot de bêtises usuelles : $\dim(M)$ (Késaco?), $\dim M_{3,4}(\mathbb{R})$ ou $\dim E$ à la place de $\dim(\mathbb{R}^4)$ pour la dimension de l'espace de départ. Je rappelle que, en vertu de la définition $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$, c'est le nombre de colonne qui donne la dimension de l'espace de départ et le nombre de lignes celui de l'espace d'arrivée.

Le résultat $\text{Im } M = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$ est en général restitué mais :

- le fait que C_3 est nulle et donc qu'il n'y a pas de contribution de la colonne 3 n'a pas toujours été assimilé
- la relation $C_1 + C_2 = C_4$ n'a pas toujours été repérée.

Certains affirment que (C_1, C_2, C_4) est libre (alors que c'est faux vu la relation $C_1 + C_2 = C_4$).

Des erreurs aussi sur le noyau : le théorème du rang permet de connaître la dimension du noyau et **connaissant la dimension du noyau, vous connaissez le nombre de vecteurs linéairement indépendants du noyau qu'il vous faut rechercher**

Cette partie du raisonnement à rarement était clairement explicitée : les relations sur les colonnes utilisées pour le calcul du rang donnent des vecteurs du noyau mais n'oubliez pas de vérifier (ou au moins de dire) qu'ils sont linéairement indépendants...

Encore quelques difficultés pour certains sur les passage suivant :

$C_3 = 0$ signifie que l'image de $(0, 0, 1, 0)$ (troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$) est nulle et donc que $(0, 0, 1, 0) \in \text{Ker } M$

$$C_1 + C_2 - C_4 = 0 \Leftrightarrow M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ permet de justifier que } (1, 1, 0, -1) \text{ est dans Ker } M$$

5. Le a) a été plutôt bien réussie mis à part quelques irréductibles qui rentrent la matrice en ligne et pas en colonne!

Bien souvent, vous manquez de bon sens pour le b) où vous proposez la relation $Q^{-1}MP$ alors que ces produits matriciels ne sont pas possibles : M possède 4 colonnes et P possède 3 lignes donc le produit MP n'existe pas!

Ici, les bases de l'espace de départ sont $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et donc la matrice de passage au départ est Q .

Les bases de l'espace d'arrivé sont $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et donc la matrice de passage à l'arrivée est P .

Le changement de bases est donc $N = P^{-1}MQ$!

EXERCICE :

1. Bien fait en général.
2. Même si vous ne parvenez pas à le prouver, vous pouvez admettre et utiliser que $P \in \text{Ker } f$
Le lien injectivité/noyau était un minimum à restituer dans cette question...ce qui n'est pas le cas de toutes les copies malheureusement...
Il est important de bien lire : le sujet ne vous demande pas de déterminer $\text{Ker } f$ mais de vérifier que $P \in \text{Ker } f$. Certains perdent donc du temps à déterminer le noyau alors que cela n'est pas nécessaire dans cette question...
3. Honte à ceux qui n'ont pas écrit correctement le théorème du rang dans ces conditions : ils mériteraient que je les dénonce!
Là encore, on peut utiliser la question précédente (même sans l'avoir traité) et il fallait restituer le lien surjectivité/image.
4. On a toujours $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$ car c'est une égalité de dimension : $\dim \text{Im } A = \dim \text{Im } f$ car les sev $\text{Im } A$ et $\text{Im } f$ sont isomorphes via la base (mais ils ne sont pas forcément égaux) !
Attention aux confusions : $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont des sev de $\mathbb{R}_2[X]$ $\text{Im } A$ et $\text{Ker } A$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$
Ces sev sont bien sûr reliés par isomorphisme via la base $(1, X, X^2)$ ainsi : $P = X^2 - 5X - 3 \in \text{Ker } f \Leftrightarrow (-3, -5, 1) \in \text{Ker } A$
5. La matrice B est correcte en général. Un gros tiers d'étudiants se trompent sur le rang, c'est dommage. On retrouve, là encore, la confusion $\text{Ker } B$ et $\text{Ker } g$ qui se déduisent l'un de l'autre mais ne sont pas égaux dans cette situation.
6. Bien souvent, la liberté de la famille (Q, R) est donnée mais c'est plus compliqué pour obtenir que (Q, R) est une famille de $\text{Im } f$ car vous ne pensez pas à exploiter l'information de la question 1 : f étant un projecteur $\text{Ker } (f - id) = \text{Im } f$ et donc, puisque Q et R sont dans $\text{Ker } (f - id)$, ils sont dans $\text{Im } f$
7. Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E , ce n'est pas toujours vérifier libre et génératrice!
Si on connaît $\dim E$, il suffit de vérifier l'une des propriétés (souvent le caractère libre) et que $\text{Card}(\mathcal{B}') = \dim E$!
Je rappelle que $\dim \mathcal{B}'$ n'a aucun sens!
Là encore, l'argument le plus rapide était d'utiliser les connaissances sur les projecteurs :
 f est un projecteur donc $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = \mathbb{R}_2[X]$ et (P, Q, R) est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$ obtenue en concaténant la base (P) de $\text{Ker } f$ avec la base (Q, R) de $\text{Im } f$.
8. Là encore, il est inutile de refaire des calculs mais il faut utiliser les résultats vu dans les questions précédentes :
 $P \in \text{Ker } (f) \Leftrightarrow f(P) = 0$ donc $f(P)$ de coordonnées $(0, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}'$.
 $Q \in \text{Ker } (f - id) \Leftrightarrow f(Q) - Q = 0 \Leftrightarrow f(Q) = Q$ donc $f(Q)$ de coordonnées $(0, 1, 0)$ dans $\mathcal{B}'$.
 $R \in \text{Ker } (f + id) \Leftrightarrow f(R) + R = 0 \Leftrightarrow f(R) = -R$ donc $f(R)$ de coordonnées $(0, 0, -1)$ dans $\mathcal{B}'$.
Il reste à appliquer la définition d'une matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Attention, j'ai trop souvent vu $f(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ce qui est FAUX ($f(Q)$ est un polynôme!)
9. Bien traitée lorsqu'elle l'a été mais elle n'a été traité que trop peu...
10. Il s'agit d'écrire la relation de changement de bases pour un endomorphisme mais il faut faire attention à la matrice de passage donnée pour écrire la bonne relation!