

Nom :

Devoir surveillé n° 1 - 1 heure 30

*Le barème est de 10 points sur les applications du cours et 10 points sur l'exercice.
Veuillez à équilibrer votre temps de travail équitablement!*

APPLICATIONS DIRECTES DU COURS :**1. Compléter :**

- La fonction Arcsin est définie sur d'image
- La fonction Arctan est définie sur et d'image
- On sait que : $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dots\dots\dots$ et $\operatorname{Arctan}(1) = \dots\dots\dots$
- On sait aussi que :
 $\forall x \in \dots\dots\dots, \operatorname{Arcsin}'(x) = \dots\dots\dots$ et $\forall x \in \dots\dots\dots, \operatorname{Arctan}'(x) = \dots\dots\dots$

2. Donner l'expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$ **3. Donner l'expression de la solution de l'équation différentielle $y'' = -2y' - 4y$** Rappel : $-1 \pm i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ **4. Énoncer le théorème du rang pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$** puis préciser l'image et le noyau de M.**5. On connaît partiellement la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} ? & ? & ? \\ ? & 0 & 1 \\ ? & 1 & 0 \end{pmatrix}$** entre deux bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de $\mathbb{R}^3$

a. Sachant que $e'_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ et que e'_2 et e'_3 sont dans le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(e_2, e_3)$, compléter la matrice P.

b. On appelle Q la matrice de passage entre deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^4$.

Si M est la matrice d'une application linéaire f relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$, exprimer à l'aide d'une égalité matricielle la matrice N de f relativement aux bases $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{B}'$.

EXERCICE : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ associé à $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ 10 & 6 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

1. Justifier que f est un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Justifier que $P = -X^2 + 5X - 3$ est dans le noyau de f . L'application f est-elle injective?
3. Écrire le théorème du rang pour f . Justifier, à l'aide de la question 1, que $\operatorname{rg}(f) \leq 2$. L'application f est-elle surjective?
4. Justifier que $\operatorname{rg}(f) = 2$, expliciter alors sans calcul $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$
5. Donner la matrice B canoniquement associée à $g = f - id$. Quel est son rang? En déduire la dimension du noyau de g .
 Trouver un polynôme Q de degré 1 et un polynôme R de degré 2 qui sont dans $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} (f - id)$
 (On prendra un coefficient constant positif pour Q et R sera unitaire c-à-d de coefficient dominant égal à 1)
6. Justifier que (Q, R) est une base de l'image de f .
7. Prouver que $\mathcal{B}' = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

La question peut être traitée même sans connaître Q et R en admettant le résultat des questions précédentes

8. On rappelle que f est un projecteur. Donner sans calcul les coordonnées de $f(Q)$ et de $f(R)$ dans $\mathcal{B}'$.
 En déduire, sans calcul, la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$

La question peut être traitée même sans connaître Q et R en admettant le résultat des questions précédentes

9. Vérifier que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est $N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10. Donner une relation matricielle liant les matrices A et A' faisant intervenir la matrice N et son inverse.