PT 2025-2026 : Correction du DM n° 4

PROBLÈME N° 1

Soit α un réel non nul. On pose, pour tout réel x de $[-1,1]$: $\quad g_\alpha(x) = \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$

1. Montrer que g_α est de classe C^2 sur $]-1,1[$

On sait que la fonction Arcsin est C^∞ donc C^2 sur $]-1,1[$ et que la fonction cos est C^∞ donc C^2 sur $\mathbb{R}$ aussi g_α est de classe C^2 sur $]-1,-1[$ par composition de fonctions de classe C^2.

2. Donner, pour tout x de $]-1,1[$, l'expression de $g_\alpha'(x)$ en fonction de x.

$\forall x \in]-1,1[, \quad g_\alpha'(x) = \alpha \operatorname{Arcsin}'(x) \times \cos'(\alpha \operatorname{Arcsin} x) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \times -\sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$

3. Donner, pour tout x de $]-1,1[$, l'expression de $g_\alpha''(x)$ en fonction de x.

$\forall x \in]-1,1[, \quad g_\alpha''(x) = \alpha \times \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' \times -\sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) + \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \times -\alpha \operatorname{Arcsin}'(x) \times \sin'(\alpha \operatorname{Arcsin} s)$

soit : $\quad g_\alpha''(x) = \alpha \times -\dfrac{1}{2} \times -2x \times (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \times -\sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) + \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \times \dfrac{-\alpha}{\sqrt{1-x^2}} \times \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$

ou : $\quad g_\alpha''(x) = -\dfrac{\alpha x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \times \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) - \dfrac{\alpha^2}{1-x^2} \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$

4. Montrer que g_α est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $\quad (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \quad (\mathscr{E})$

Pour $x \in]-1,1[$:

$(1-x^2)g_\alpha''(x) - xg_\alpha'(x) + \alpha^2 g_\alpha(x)$

$= -\dfrac{\alpha x}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) - \alpha^2 \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x) + \dfrac{\alpha x}{\sqrt{1-x^2}} \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x) + \alpha^2 \cos(\alpha \operatorname{Arcsin} x) = 0$

$\boxed{g_\alpha \text{ est bien sur solution sur }]-1,1[\text{ de l'équation différentielle } \quad (1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \quad (\mathscr{E})}$

5. On recherche une solution de $(\mathscr{E})$ développable sur $]-1,1[$en série entière sous la forme : $\quad y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

et telle que : $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(a) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_{n+2} en fonction de a_n

Par dérivation terme à terme, on a, pour $x \in]-1,1[$: $\quad y'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad$ et $\quad y''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=\cancel{0}2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \alpha^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

On pose $k = n-2$ dans la première somme (qui peut démarrer à $n = 2$) et $k = n$ dans les autres sommes.

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)a_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^k + \alpha^2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = 0$$

On peut regrouper toutes les sommes car elles sont toutes convergentes sur $]-1,1[$:

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \Big((k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - k a_k + \alpha^2 a_k\Big) x^k = 0$$

Mais alors, par unicité du développement en série entière, on a :

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + \alpha^2 y(x) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)(k+2)a_{k+2} - k(k-1)a_k - k a_k + \alpha^2 a_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_{k+2} = \frac{(k^2 - k + k - \alpha^2)a_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 - \alpha^2}{(k+1)(k+2)} a_k \text{ car } (k+1)(k+2) \neq 0$$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \dfrac{n^2 - \alpha^2}{(n+2)(n+1)} a_n}$

(b) Donner, pour tout entier naturel p, la valeur de a_{2p+1}

On sait que $\quad a_0 = y(0) = 1 \quad$ et $\quad a_1 = \dfrac{y'(0)}{1!} = 0 \quad$ Dès lors, par une récurrence immédiate avec l'hypothèse HR_p : « $a_{2p+1} = 0$ »,

on vérifie facilement que $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0}$

<u>Initialisation</u> : HR_0 est vraie pour car $a_{2\times 0+1} = a_1 = 0$

<u>Hérédité</u> : Prouvons $HR_p \Rightarrow HR_{p+1}$ autrement dit on suppose que $a_{2p+1} = 0$ et on vérifie que $a_{2(p+1)+1} = a_{2p+3} = 0$

Or, avec $n = 2p+1$ dans la relation de 5.a, on a : $\quad a_{2p+3} = \dfrac{(2p+1)^2 - \alpha^2}{(2p+3)(2p+2)} a_{2p+1} = 0$ si $a_{2p+1} = 0$

<u>Conclusion</u> : Par une récurrence simple sur p, on a donc justifié que $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0}$

(c) Exprimer, pour tout entier naturel p a_{2p} en fonction de p (on ne cherchera pas à simplifier le numérateur de a_{2p})

En itérant la relation de 2.a, on a : $\quad a_{2p} = \dfrac{(2p-2)^2 - \alpha^2}{(2p)(2p-1)} a_{2p-2} = \dfrac{\big((2p-2)^2 - \alpha^2\big)\big((2p-4)^2 - \alpha^2\big)}{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3)} a_{2p-4}$

$$a_{2p} = \ldots = \frac{\big((2p-2)^2 - \alpha^2\big)\big((2p-4)^2 - \alpha^2\big) \times \ldots \times (2^2 - \alpha^2)(0^2 - \alpha^2)}{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3) \times \ldots \times 2 \times 1} a_0$$

Aussi, puisque $a_0 = y(0) = 1$, on a : $\quad \boxed{a_{2p} = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \big((2k)^2 - \alpha^2\big)}{(2p)!}}$

(d) Que dire de la série entière lorsque α est un entier relatif pair ? En déduire, dans ce cas, le rayon de convergence.

Si $\alpha = \pm 2n$ pour $n \in \mathbb{N}$ alors, par une récurrence initialisé à $p = n$, on a, pour tout $p \geqslant n$, $a_{2p} = 0$.

De ce fait, $\boxed{\text{la série entière } \sum_{n \geqslant 0} a_n^n \text{ est finalement un polynôme lorsque } \alpha \text{ est un entier relatif pair}}$ (il n'y a qu'un nombre fini de coefficients a_n non nul). La convergence de la série est alors réalisé pour tout x réel et donc

$\boxed{R = +\infty \quad \text{si } \alpha \text{ est un entier relatif pair}}$

(e) Quel est le rayon de convergence de la série lorsque α n'est pas un entier relatif pair ?

On suppose cette fois que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq \pm 2n$. On a de toute façon une série lacunaire $\quad \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n = \sum_{p \geqslant 0} a_{2p} x^{2p}$ mais, cette fois, les coefficients a_{2p} ne s'annule plus. On calcule le rayon de convergence R avec la règle de d'Alembert. Pour $x \neq 0$ en utilisant 2.a avec $n = 2p$:

$$\frac{|a_{2p+2}x^{2p+2}|}{|a_{2p}x^{2p}|} = \frac{|(2p)^2 - \alpha^2|}{(2p+2)(2p+1)} x^2 \sim_{p \to +\infty} \frac{4p^2}{4p^2} x^2 = x^2 \xrightarrow[p \to +\infty]{} x^2$$

Si $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$ alors la série converge absolument et donc $R \geqslant 1$. $\quad$ Si $x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$ alors la série diverge grossièrement et donc $R \leqslant 1$. Finalement, on a $\boxed{R = 1 \quad \text{si } \alpha \text{ n'est pas un entier relatif pair}}$

(f) Justifier que g_α est bien développable en série entière et que le développement est donnée par la série $\sum a_n x^n$

On sait déjà que g_α est solution de $(\mathscr{E})$ sur $]-1,1[$ et que $g_\alpha(0) = \cos(\alpha \times 0) = 1$ et $g_\alpha'(0) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-0^2}} \times -\sin(0) = 0$

Donc, par unicité du problème de Cauchy, on peut affirmer que $\quad g_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < R$. Puisque $R > 0$, on peut donc affirmer que $\boxed{g_\alpha \text{ est développable en série entière et que le développement est donnée par la série } \sum a_n x^n}$

6. Dans cette question uniquement, on se place dans le cas où $\alpha = 1$.

(a) Exprimer alors a_{2p} à l'aide de $(2p)!$ et de $p!$.

$$a_{2p} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \big((2k)^2 - 1^2\big)}{(2p)!} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \big((2k-1)(2k+1)\big)}{(2p)!} = \frac{(-1) \times 1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2p-5)(2p-3) \times (2p-3)(2p-1)}{(2p)!}$$

autrement dit : $\quad a_{2p} = -\dfrac{1}{(2p)!} \dfrac{\big(1^2 \times 3^2 \times \cdots \times (2p-1)^2\big)}{2p-1} \quad$ car les termes au numérateur sont au carré sauf le premier et le dernier

On ajoute les carrés des termes pairs manquant au numérateur qu'on compense au dénominateur

$$a_{2p} = -\frac{1}{(2p)! \times (2p-1)} \frac{1^2 \times 2^2 \times 3^2 \times \cdots \times (2p-1)^2 \times (2p)^p - 2}{2^2 \times 4^2 \times (2p)^2} = -\frac{1}{(2p)! \times (2p-1)} \times \frac{(2p)!^2}{(2^p \times 1 \times 2 \times \cdots \times p)^2} \Leftrightarrow \boxed{a_{2p} = -\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2(2p-1)}}$$

(b) Pour tout réel x de $[-1,1]$, démontrer que $\quad g_\alpha(x) = \sqrt{1-x^2}$

Pour $x \in [-1,1]$:

$g_1(x) = \cos(\operatorname{Arcsin} x) = |\cos(\operatorname{Arcsin} x)| = \sqrt{\cos^2(\operatorname{Arcsin} x)} \quad$ car $\operatorname{Arcsin} x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(\operatorname{Arcsin} x) \geqslant 0$

Aussi : $g_1(x) = \sqrt{1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x)} \Leftrightarrow \boxed{g_1(x) = \sqrt{1-x^2}}$

(c) En calculant directement le développement en série entière de $g_\alpha(x)$, retrouver l'expression de a_{2p}

On peut directement utiliser la formule du binôme généralisé : $\quad g_1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1+u)^{-\frac{1}{2}} \quad$ avec $u = -x^2$. Pour $|u| < 1$:

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}-1\right) \times \left(\frac{1}{2}-2\right) \times \cdots \times \left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{\Big(1 \times (-1) \times (-3) \times \cdots \times (-(2n-3))\Big)}_{=(-1)^{n-1} \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)} \frac{u^n}{n!}$$

En ajoutant le facteur $(2n-1)$ manquant au numérateur et en compensant : $(1+u)^{\frac{1}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} \times \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2n-1} \frac{u^n}{n!}$

En ajoutant au numérateur et au dénominateur le produits des termes pairs, on a :

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2n-1} \times \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \times \frac{u^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2n-1} \times \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^n \times n!} \times \frac{u^n}{n!}$$

Pour $|-x^2| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$: $g_1(x) = \sqrt{1-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2n-1} \times \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^n \times n!} \times \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-(2n)!}{(2^n)^2(n!)^2(2n-1)} x^{2n}$

On retrouve bien l'expression a_{2n} de la question 6.a.

PROBLÈME N° 2

Dans un casino, il a deux machines à sous A et B qui sont réglées de la façon suivante :

— la probabilité de gagner sur la machine A est de $\frac{1}{5}$

— la probabilité de gagner sur la machine B est de $\frac{1}{10}$

Un joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents mais il ne sait pas laquelle est la plus favorable. Il décide alors d'adopter la stratégie suivante :

— il commence par choisir une machine au hasard

— après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre et il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner

On définit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les événements suivants :

— G_k « Le joueur gagne la $k$ième partie »

— A_k « La k ième partie se déroule sur la machine A »

1. Écrire une fonction Python `jouer` d'argument l'entier naturel non nul n et qui simule le déroulement de n parties retournant la proportion de parties gagnées parmi ces n parties.

```python
import random
def machine(b):
    """ simule une partie avec la machine A si b=0 et B sinon
     renvoie 1 pour une partie gagnée et 0 sinon"""
    p=random.random()
    if b==0:
        if p<0.2:
            return 1
        else:
            return 0
    else:
        if p<0.1:
            return 1
        else:
            return 0

def jouer(n):
    L=[]
    # choix initial de la machine: si x<0.5, machine A et machine B sinon
    x=random.random()
    if x<0.5:
        b=0
    else:
        b=1
    for i in range(n): # simulation des n parties dans la liste L
        L.append(machine(b)) # L[i]=0 si la partie est perdue et 1 sinon
        if L[i]==0: # il faut changer de machine
            b=1-b # si b=1 alors b devient 0 et inversement
    return sum(L)/n # sum(L)=nombre de 1 dans L=nombre de parties gagnées
```

OU AUTRE PROPOSITION :

```python
import random

def jouer(n):
    machine=0 # machine=0 si on joue avec la machine A et 1 sinon
    total=0  # total est le nombre de partie gagnée
    # choix de la machine initial aléatoire
    if (random.random()>0.5):
        machine=1
    for i in range(n): # simulation des n parties
        if (machine==0):
            if (random.random()<0.2):
                total+=1 # total n'augmente que si la partie est gagnée
            else:
                machine=1 # on change de machine si la partie est perdue
        else:
            if (random.random()<0.1):
                total+=1
            else:
                machine=0
    return (total/n)
```

2. Déterminer la probabilité de gagner la première partie

Il s'agit de calculer $P(G_1)$. On utilise pour cela le système complet d'événement $\{A_1, \overline{A_1}\}$ sachant que, vu que le choix initial de la machine est aléatoire, $P(A_1) = P(\overline{A_1}) = \frac{1}{2}$. En outre, on connaît aussi les probabilité conditionnelle :

- si A_1 est réalisé, le joueur joue sur la machine A et donc il gagne avec une probabilité de $\frac{1}{5}$ soit $P(G_1|A_1) = \frac{1}{5}$

- si $\overline{A_1}$ est réalisé, le joueur joue sur la machine B et donc il gagne avec une probabilité de $\frac{1}{10}$ soit $P(G_1|\overline{A_1}) = \frac{1}{10}$

D'après la formule des probabilités totales :

$P(G_1) = P(A_1) \times P(G_1|A_1) + P(\overline{A_1}) \times P(G_1|\overline{A_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{2+1}{2 \times 10} = \frac{3}{20}$

3. Que dire de la famille d'événements $\{A_1 \cap A_2, A_1 \cap \overline{A_2}, \overline{A_1} \cap A_2, \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\}$? En déduire $P(G_2)$.

• Justifions que cette famille est un système complet d'événements :

Méthode n° 1 : Les événements de cette famille sont deux à deux incompatibles (car l'intersection de 2 événements comporte toujours soit $A_1 \cap \overline{A_1}$ soit $A_2 \cap \overline{A_2}$ qui est vide) et la réunion de ces événements donne l'univers en entier car :

$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \left(A_1 \cap (A_2 \cup \overline{A_2})\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap (A_2 \cup \overline{A_2})\right) = (A_1 \cap \Omega) \cup (\overline{A_1} \cap \Omega) = A_1 \cup \overline{A_1} = \Omega$

Méthode n° 2 : Les 4 événements donnent les 4 alternatives possibles à l'issue de la première partie :

$A_1 \cap A_2$ est l'événement « la partie n°1 jouée sur la machine A est gagnante »

$A_1 \cap \overline{A_2}$ est l'événement « la partie n°1 jouée sur la machine A est perdante »

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ est l'événement « la partie n°1 jouée sur la machine B est gagnante »

$\overline{A_1} \cap A_2$ est l'événement « la partie n°1 jouée sur la machine B est perdante »

L'un et un seul de ces événements sera réalisé à l'issue de la première partie aussi cette famille est un système complet d'événements.

• On peut utiliser la formule des probabilités totales sur ce système complet d'événements :

$P(G_2) = P(A_1 \cap A_2) \times P(G_2|A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap \overline{A_2}) \times P(G_2|A_1 \cap \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} \cap A_2) \times P(G_2|\overline{A_1} \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \times P(G_2|\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$

On connaît les probabilités conditionnelles de cette formule :

- elles valent $\frac{1}{5}$ si on conditionne par $A_1 \cap A_2$ ou $\overline{A_1} \cap A_2$ puisque A_2 étant réalisé, on joue sur la machine A

- elles valent $\frac{1}{10}$ pour les deux autres conditionnements où $\overline{A_2}$ est réalisé donc le jeu est sur la machine B

On calcule les autres probabilités par la formule des probabilités composées :

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2|A_1)$ or $P(A_2|A_1) = P(G_1|A_1) = \frac{1}{5}$ (sachant A_1, on réalise A_2 lorsqu'on réalise G_1) soit $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

Et, de même : $P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(A_1) \times P(\overline{A_2}|A_1) = P(A_1) \times P(\overline{G_1}|A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$ et aussi, de manière analogue et en se limitant aux applications numériques : $P(\overline{A_1} \cap A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{20}$ et $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$

Finalement : $P(G_2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{9}{20} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \times \frac{1}{10} = \frac{4+8+18+1}{200} = \frac{31}{200}$

4. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que cette partie l'ait été sur la machine A ?

On cherche désormais $P(A_2|G_2)$ soit : $P(A_2|G_2) = \frac{P(A_2 \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{P(A_2) \times P(G_2|A_2)}{P(G_2)}$

Méthode n° 1 : on calcule $P(A_2)$ avec le système complet $\{A_1, \overline{A_1}\}$:

$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{1}{2} \times P(G_1|A_1) + \frac{1}{2} P(\overline{G_1}|\overline{A_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} = \frac{2+9}{20} = \frac{11}{20}$

puisqu'en effet : $P(A_2|A_1)$ est la probabilité de gagner sachant qu'on joue sur la machine A soit $P(A_2|A_1) = P(G_1|A_1) = \frac{1}{5}$

et $P(A_2|\overline{A_1})$ est la probabilité de perdre sachant qu'on joue sur la machine B soit $\frac{9}{10}$

Méthode n° 2 : on remarque que : $A_2 = (A_1 \cap G_1) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{G_1})$ car, pour jouer la deuxième partie sur la machine A, soit on a gagné la première sur la machine A, soit on a perdu la première sur la machine B

Les événements $A_1 \cap G_1$ et $\overline{A_1} \cap \overline{G_1}$ sont incompatibles aussi, avec la formule des probabilités composées :

$$P(A_2) = P(A_1 \cap G_1) + P(\overline{A_1} \cap \overline{G_1}) = P(A_1) \times P(G_1|A_1) + P(\overline{A_1}) \times P(\overline{G_1}|\overline{A_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} = \frac{11}{20}$$

En effet, $P(\overline{G_1}|\overline{A_1})$ est la probabilité de perdre sachant qu'on joue sur la machine B soit $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

Finalement : $P(A_2|G_2) = \dfrac{\frac{11}{20} \times \frac{1}{5}}{\frac{31}{200}} = \dfrac{11}{100} \times \dfrac{200}{31} \Leftrightarrow \boxed{P(A_2|G_2) = \dfrac{22}{31}}$

5. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$

(a) Exprimer $P(G_k)$ à l'aide de $P(A_k)$.

On utilise cette fois le système complet $\{A_k, \overline{A_k}\}$ et la formule des probabilités totales :

$$P(G_k) = P(A_k) \times P(G_k|A_k) + P(\overline{A_k}) \times P(G_k|\overline{A_k}) = P(A_k) \times \frac{1}{5} + \big(1 - P(A_k)\big) \times \frac{1}{10} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(G_k) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}P(A_k)}$$

où $P(G_k|A_k)$ (resp $P(G_k|\overline{A_k})$ est la probabilité de gagner sur la machine A (resp B) soit $P(G_k|A_k) = \frac{1}{5}$ (resp $P(G_k|\overline{A_k}) = \frac{1}{10}$)

Remarque : Écrire $G_k = (A_k \cap G_k) \cup (\overline{A_k} \cap G_k)$ où les deux événements sont incompatibles, c'est (re)découvrir les probabilités totales...

(b) Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$

Méthode n° 1 : On utilise le système complet $\{A_k, \overline{A_k}\}$ et la formule des probabilités totales :

$P(A_{k+1}) = P(A_k) \times P(A_{k+1}|A_k) + P(\overline{A_k}) \times P(A_{k+1}|\overline{A_k})$ avec $P(\overline{A_k}) = 1 - P(A_k)$

Mais : $P(A_{k+1}|A_k) = P(G_k|A_k) = \frac{1}{5}$ (pour jouer sur la machine A la partie $k+1$, il faut gagner la partie k jouer sur la machine A)

et : $P(A_{k+1}|\overline{A_k}) = P(\overline{G_k}|\overline{A_k}) = \frac{9}{10}$ (pour jouer sur la machine A la partie $k+1$, il faut perdre la partie k jouer sur la machine B)

Ainsi : $P(A_{k+1}) = P(A_k) \times \frac{1}{5} + \big(1 - P(A_k)\big) \times \frac{9}{10} \Leftrightarrow \boxed{P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}}$

Méthode n° 2 : On remarque $A_{k+1} = (A_k \cap G_k) \cup (\overline{A_k} \cap \overline{G_k})$ car, pour jouer la partie $k+1$ sur la machine A, soit on a gagné la partie k sur la machine A, soit on l'a perdue sur la machine B et les deux événements sont incompatibles : $P(A_{k+1}) = P(A_k \cap G_k) + P(\overline{A_k} \cap \overline{G_k}) = P(A_k) \times P(G_k|A_k) + P(\overline{A_k}) \times P(\overline{G_k}|\overline{A_k} = P(A_k)) \times P(G_k|A_k) + P(\overline{A_k}) \times (1 - P(G_k|\overline{A_k}))$

et voir 5a pour la justification des probabilités conditionnelles

(c) En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k

On reconnaît pour $\big(P(A_k)\big)_{k \geqslant 1}$ une suite arithmético-géométrique :

- l'équation aux limites est : $\ell = -\frac{7}{10}\ell + \frac{9}{10} \Leftrightarrow \frac{17}{10}\ell = \frac{9}{10} \Leftrightarrow \ell = \frac{9}{17}$

- la suite (v_k) où $v_k = P(A_k) - \ell$ est géométrique :

$$v_{k+1} = P(A_{k+1}) - \ell = \Big(-\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}\Big) - \Big(-\frac{7}{10}\ell + \frac{9}{10}\Big) = -\frac{7}{10}\big(P(A_k) - \ell\big) = -\frac{7}{10}v_k \quad \text{soit} \quad v_k = \Big(-\frac{7}{10}\Big)^{k-1} \times v_1$$

Ainsi : $P(A_k) = v_k + \ell = \Big(-\frac{7}{10}\Big)^{k-1} \times \big(P(A_1) - \ell\big) + \ell = \Big(-\frac{7}{10}\Big)^{k-1}\Big(\frac{1}{2} - \frac{9}{17}\Big) + \frac{9}{17}$ soit $\boxed{P(A_k) = \Big(-\frac{7}{10}\Big)^{k-1}\Big(-\frac{1}{34}\Big) + \frac{9}{17}}$

puis : $P(G_k) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}\bigg(\Big(-\frac{7}{10}\Big)^{k-1}\Big(-\frac{1}{34}\Big) + \frac{9}{17}\bigg)$ soit $\boxed{P(G_k) = \frac{13}{85} - \Big(-\frac{7}{10}\Big)^{k-1} \times \frac{1}{340}}$

(d) Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} P(G_k)$. Calculer S_n puis la limite de $\frac{S_n}{n}$ lorsque $n \to +\infty$

Comparer votre résultat à des simulations numériques obtenues à l'aide de la question 1.

On a :

$$\sum_{k=1}^{n} P(G_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{13}{85} - \frac{1}{340}\sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{7}{10}\Big)^{k-1} = \frac{13}{85}n - \frac{1}{340} \times \sum_{l=0}^{n-1}\Big(-\frac{7}{10}\Big)^{l} = \frac{13}{85}n - \frac{1}{340} \times \frac{1 - \Big(-\frac{7}{10}\Big)^n}{1 + \frac{7}{10}} = \frac{13}{85}n - \frac{1}{34 \times 17}\bigg(1 - \Big(-\frac{7}{10}\Big)^n\bigg)$$

Aussi : $\frac{S_n}{n} = \frac{13}{85} - \underbrace{\frac{1}{34 \times 17n}}_{\to 0}\underbrace{\bigg(1 - \Big(-\frac{7}{10}\Big)^n\bigg)}_{\to 1-0} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{13}{85} - 0 \times 1 = \frac{13}{85}$ soit $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{13}{85}}$

En faisant tourner l'algorithme, on trouve, pour n grand, une valeur empirique proche de cette valeur théorique