

« En sciences, ce qui est démontrable ne doit pas être admis sans démonstration »

Richard Dedekind (1831-1916), mathématicien allemand.

Vous traiterez au moins l'un des deux problèmes suivants

Pour information, ces problèmes sont prévus pour une durée de 1h-1h15 à l'écrit

PROBLÈME N° 1

Soit α un réel non nul. On pose, pour tout réel x de $[-1, 1]$: $g_\alpha(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$

- Montrer que g_α est de classe C^2 sur $] -1, 1[$
- Donner, pour tout x de $] -1, 1[$, l'expression de $g'_\alpha(x)$ en fonction de x .
- Donner, pour tout x de $] -1, 1[$, l'expression de $g''_\alpha(x)$ en fonction de x .
- Montrer que g_α est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$ ($\mathcal{E}$)
- On recherche une solution de ($\mathcal{E}$) développable sur $] -1, 1[$ en série entière sous la forme : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
et telle que : $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
 - Exprimer, pour tout entier naturel n , a_{n+2} en fonction de a_n
 - Donner, pour tout entier naturel p , la valeur de a_{2p+1}
 - Exprimer, pour tout entier naturel p , a_{2p} en fonction de p (on ne cherchera pas à simplifier le numérateur de a_{2p})
 - Que dire de la série entière lorsque α est un entier relatif pair? En déduire, dans ce cas, le rayon de convergence.
 - Quel est le rayon de convergence de la série lorsque α n'est pas un entier relatif pair?
 - Justifier que g_α est bien développable en série entière et que le développement est donnée par la série $\sum a_n x^n$
- Dans cette question uniquement, on se place dans le cas où $\alpha = 1$.
 - Exprimer alors a_{2p} à l'aide de $(2p)!$ et de $p!$.
 - Pour tout réel x de $[-1, 1]$, démontrer que $g_1(x) = \sqrt{1-x^2}$
 - En calculant directement le développement en série entière de $g_1(x)$, retrouver l'expression de a_{2p}

PROBLÈME N° 2

Dans un casino, il a deux machines à sous A et B qui sont réglées de la façon suivante :

- la probabilité de gagner sur la machine A est de $\frac{1}{5}$
- la probabilité de gagner sur la machine B est de $\frac{1}{10}$

Un joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents mais il ne sait pas laquelle est la plus favorable. Il décide alors d'adopter la stratégie suivante :

- il commence par choisir une machine au hasard
- après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre et il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner

On définit, pour $k \in \mathbb{N}^*$, les événements suivants :

- G_k « Le joueur gagne la k ème partie »
- A_k « La k ème partie se déroule sur la machine A »

- Écrire une fonction Python jouer d'argument l'entier naturel non nul n et qui simule le déroulement de n parties retournant la proportion de parties gagnées parmi ces n parties.
- Déterminer la probabilité de gagner la première partie
- Que dire de la famille d'événements $\{A_1 \cap A_2, A_1 \cap \overline{A_2}, \overline{A_1} \cap A_2, \overline{A_1} \cap \overline{A_2}\}$? En déduire $P(G_2)$.
- Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que cette partie l'ait été sur la machine A?
- On fixe $k \in \mathbb{N}^*$
 - Exprimer $P(G_k)$ à l'aide de $P(A_k)$.
 - Montrer que $P(A_{k+1}) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$
 - En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k
 - Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n P(G_k)$. Calculer S_n puis la limite de $\frac{S_n}{n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

Comparer votre résultat à des simulations numériques obtenues à l'aide de la question 1.