EXERCICE N° 6

1. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t$. Ce nombre est appelé la constante de Catalan.

Soit $f(t) = \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t}$ alors f est continue sur $]0,1]$ et : $f(t) \sim_0 \dfrac{t}{t} = 1$ donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$ aussi f se prolonge par continuité en 0 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car elle est faussement généralisée.

2. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}$

On réalise une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = \operatorname{Arctan} t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v(t) = \ln t \end{cases}$

On étudie la convergence de $\Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 = \Big[\operatorname{Arctan}(t) \times \ln(t)\Big]_0^1$:

$\Big[u(t)v(t)\Big]_0^1 = u(1)\underbrace{v(1)}_{=0} - \lim\limits_{t\to 0} \operatorname{Arctan}(t)\ln(t) = 0 - 0 = 0$ car : $\operatorname{Arctan}(t)\ln t \sim_0 t\ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par croissance comparée

3. Prouver que, pour $t \in]0,1[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\ln(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\ln(t) = (\ln t)\sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n$ où on reconnaît une somme géométrique de raison $q = -t^2$ avec $|q| < 1$ qui est donc convergente aussi : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\ln(t) = (\ln t) \times 1 \times \frac{1-0}{1-(-t^2)} = \frac{\ln t}{1+t^2}$

4. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

On va utiliser le théorème d'intégration terme à terme avec : $\displaystyle S(t) = \frac{\ln t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ où $f_n(t) = (-1)^n t^{2n}\ln t$

• <u>On énonce le théorème</u> Il s'agit de vérifier

i) S est continue sur $]0,1]$

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur $]0,1]$

iii) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge où $u_n = \displaystyle\int_0^1 |f_n(t)\ dt$

et on pourra conclure que S est intégrable sur $]0,1]$ (vu en Q2) et $\displaystyle\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$

• <u>Vérifions les hypothèses du théorème une par une</u>

i) <u>S est continue sur $]0,1]$</u> par quotient de fonctions usuelles vu que $1+t^2 \neq 0$ et $t > 0$ sur $]0,1]$

ii) <u>f_n est intégrable sur $]0,1]$ pour $n \in \mathbb{N}$</u> puisque f_n est continue sur $]0,1]$ vu que $t > 0$ et, en 0 :
-si $n = 0$, $f_0(t) = \ln t$ or on sait que $[t \mapsto \ln t]$ est intégrable sur $]0,1]$
-si $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{t\to 0^+} f_n(t) = 0$ par croissance comparée et on peut prolonger f_n par continuité en 0

iii) <u>la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge où $u_n = \displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t$</u>. En effet : $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^{2n} \times (-\ln t)\mathrm{d}t = -\int_0^1 t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t$

On réalise une IPP avec : $\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = t^{2n} \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \end{cases}$ où u et v sont C^1 sur $]0,1]$

On étudie la convergence de : $[u(t)v(t)]_0^1 = \underbrace{u(1)}_{=0}v(1) - \lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = 0 - 0$

or : $u(t)v(t) = \dfrac{1}{2n+1} \times t^{2n+1}\ln t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ par croissance comparée.

Les deux intégrales de l'IPP ont donc la même nature qu'on sait être convergente et on a :

$u_n = -\left(0 - \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2n+1}\int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)^2}$ car $2n+1 \geqslant 1$ d'où 0 en $t = 0$

Il reste à déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ or :

$u_n \sim \dfrac{1}{4n^2}$ or $\sum \dfrac{1}{4n^2}$ CVA donc la série $\sum u_n$ converge par critère d'équivalence

• <u>On exploite les conclusion du théorème d'intégration terme à terme</u>

Toutes les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont vérifiées et donc on sait que :

1) S est intégrable sur $]0,1]$ (mais on le savait déjà de part l'IPP menée en Q2)

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$

De sorte que finalement, avec Q4 : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

5. En remarquant que la série est alternée, proposer une fonction Python `Catalan` d'argument un entier naturel p permettant de calculer une valeur approchée de la constante de Catalan à 10^{-p} prés.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ est alternée et le théorème des séries alternées s'applique pour cette série car $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ tend bien vers 0 en décroissant. On sait alors qu'on dispose d'une majoration de reste. Si on appelle S le nombre de Catalan (autrement dit la somme de la série) et S_n la somme partielle d'ordre n alors :

$|S - S_n| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2}\right|$ (on majore par la valeur absolue du premier terme non négligé)

soit $|S - S_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}$ On obtient donc une valeur approchée de S à 10^{-p} près si on retourne la somme partielle S_n où n vérifie : $\dfrac{1}{(2n+3)^2} \leqslant 10^{-p}$

On peut alors calculer cette valeur approchée avec une boucle While :

Attention! Il y aura rapidement un problème lorsque p est grand (p de l'ordre de la quinzaine) à cause de la gestion des arrondies qui conduira à des boucles infinies...

On peut assurer la « terminaison » de la boucle avec une boucle FOR mais il faut alors calculer l'indice de fin de boucle : $\dfrac{1}{(2n+3)^2} \leqslant 10^{-p} \Leftrightarrow (2n+3)^2 \geqslant 10^p \Leftrightarrow 2n+3 \geqslant 10^{\frac{p}{2}} \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{1}{2}\left(10^{\frac{p}{2}} - 3\right) \Leftrightarrow n \geqslant \left\lfloor\dfrac{1}{2}\left(10^{\frac{p}{2}} - 3\right)\right\rfloor + 1$

Vous trouverez,ci-dessous, deux propositions de programme permettant le calcul approché de la constante de Catalan à 10^{-p} près

```python
def Catalan(p):
    s=0
    n=0
    while ((2*n+3)**2<10**p):
        s+=(-1)**n/(2*n+1)**2
        n+=1
    return s

def Catalan_bis(p):
    s=0
    for n in range(int((10**(p/2)-3)*2)):
        s+=(-1)**n/(2*n+1)**2
    return s
```