

Ce problème est la partie II du sujet Banque PT - Maths B - 2021 qui était en 2 parties.

Modélisation d'un manège pour enfants.

Le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. *Question préliminaire.* Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ d'affixe complexe z .

- (a) Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ

D'après le cours, $r_\theta(M)$ a pour affixe $e^{i\theta}z$

- (b) Donner sans justification l'affixe complexe de l'image de M par l'homothétie h_a de centre O et de rapport a avec $a \neq 0$

D'après le cours, $h_a(M)$ a pour affixe az

- (c) Vérifier que $r_\theta \circ h_a = h_a \circ r_\theta$. On note alors $f_{a,\theta} = r_\theta \circ h_a$

Il s'agit de vérifier que, pour tout point M de $\mathbb{R}^2$, $r_\theta \circ h_a(M) = h_a \circ r_\theta(M)$ et, pour cela, il suffit de vérifier que ces points ont la même affixe. Or, $r_\theta \circ h_a(M)$ a pour affixe $e^{i\theta}(az)$ et $h_a \circ r_\theta(M)$ a pour affixe $a(e^{i\theta}z)$ d'où l'égalité attendue.

2. *Formule de trigonométrie.* On considère 4 réels a, b, p et q .

- (a) Donner la linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ et $\sin(a)\sin(b)$

$$\cos(a)\cos(b) = \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \right) \left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \right) = \frac{1}{4} (e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}) = \frac{1}{4} (2\cos(a+b) + 2\cos(a-b))$$

d'où $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$

$$\sin(a)\cos(b) = \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \right) \left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \right) = \frac{1}{4i} (e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)} - e^{-i(a+b)}) = \frac{1}{4} (2i\sin(a+b) + 2i\sin(a-b))$$

d'où $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$$\sin(a)\sin(b) = \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \right) \left(\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2} \right) = -\frac{1}{4} (e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}) = -\frac{1}{4} (2\cos(a+b) - 2\cos(a-b))$$

d'où $\sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b))$

- (b) En déduire que $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ainsi qu'une factorisation de $\sin(p) + \sin(q)$

On cherche a et b de sorte que $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{p+q}{2} \\ b=\frac{p-q}{2} \end{cases}$ et on utilise la dernière relation de la question précédente : $\cos(p) - \cos(q) = \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin(a)\sin(b) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De même : $\sin(p) + \sin(q) = \sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \sin(p)\sin(q)$

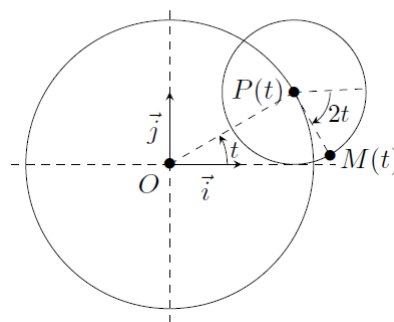
Un manège pour enfant est constitué d'une plateforme tournant autour d'un axe, lui-même animé d'un mouvement circulaire.

Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et les mouvements des points $P(t)$ et $M(t)$ sont donnés par :

- L'affixe complexe du point $P(t)$ est $2e^{it}$
- L'affixe complexe du vecteur $\overrightarrow{P(t)M(t)}$ est e^{-2it}

On note $z(t)$ l'affixe complexe du point $M(t)$ et

Γ la courbe décrite par l'ensemble des points $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.



3. (a) En calculant pour tout réel t l'affixe complexe $z(t)$ du point $M(t)$ démontrer qu'une représentation paramétrique de Γ est $\begin{cases} x(t) = 2 \cos t + \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin(t) - \sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$z(t)$ est l'affixe de $\overrightarrow{OM(t)}$ or : $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{OP(t)} + \overrightarrow{P(t)M(t)} \Leftrightarrow z(t) = 2e^{it} + e^{-2it}$ en égalant les affixes.
 $(x(t), y(t))$ sont les coordonnées cartésiennes de $M(t)$ autrement dit $x(t) = \Re(z(t))$ et $y(t) = \Im(z(t))$ aussi :
 $x(t) = \Re(2e^{it} + e^{-2it}) = 2 \cos(t) + \cos(-2t) = 2 \cos t + \cos(2t) = x(t)$
 $y(t) = \Im(2e^{it} + e^{-2it}) = 2 \sin(t) + \sin(-2t) = 2 \sin t - \sin(2t) = y(t)$

- (b) Pour tout réel t , comparer les affixes complexes de $r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t))$ et de $M(t + \frac{2\pi}{3})$
 En déduire que Γ est invariante par une rotation à préciser.

$r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t))$ a pour affixe $e^{\frac{2i\pi}{3}} z(t)$
 $M(t + \frac{2\pi}{3})$ a pour affixe $z(t + \frac{2\pi}{3}) = 2e^{i(t + \frac{2\pi}{3})} + e^{-2i(t + \frac{2\pi}{3})} = 2e^{it} e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{-2it} e^{-\frac{4i\pi}{3}}$ mais $e^{-\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{4i\pi}{3} + 2i\pi} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
 donc $z(t + \frac{2\pi}{3}) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \times (2e^{it} + e^{-2it}) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \times z(t)$ aussi $M(t + \frac{2\pi}{3}) = r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t))$
 Ainsi, le point $M(t + \frac{2\pi}{3})$ est l'image du point $M(t)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ donc
 la courbe Γ est invariante par la rotation $r_{\frac{2\pi}{3}}$

- (c) Justifier soigneusement que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à $[0, \frac{\pi}{3}]$

Tout d'abord, les fonctions x et y sont 2π périodique donc on obtient la totalité du support si on étudie la courbe sur un intervalle d'amplitude 2π .
 Ensuite, $\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$ donc les points $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
 Si on connaît la courbe pour $t \in [0, \frac{\pi}{3}]$, alors, on applique la symétrie d'axe (Ox) à la portion tracée sur $[0, \frac{\pi}{3}]$, on va obtenir la courbe pour $t \in [-\frac{\pi}{3}, 0] \cup [0, \frac{\pi}{3}] = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$
 On applique alors deux fois la rotation $r_{\frac{2\pi}{3}}$ à la portion obtenue sur $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ de sorte à obtenir la courbe pour $t \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \cup [-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}] \cup [-\frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{2\pi}{3}] = [-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ qui est un intervalle d'amplitude 2π (car $\frac{5\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3}) = 2\pi$) donc on a bien obtenu la totalité de la courbe Γ . L'étude de Γ peut donc être réduite à $[0, \frac{\pi}{3}]$

- (d) Calculer $x'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et justifier les égalités :

$$x'(t) = -2 \sin(t)(1 + 2 \cos(t)) = -4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

Par composée et somme de fonctions usuelles, x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$x'(t) = -2 \sin(t) - 2 \sin(2t) = -2 \sin(t) - 2 \times 2 \sin(t) \cos(t) = -2 \sin(t)(1 + 2 \cos(t))$ d'une part
 et, d'autre part, en utilisant les relations vues en II-2-(b) :

$$x'(t) = -2(\sin(t) + \sin(2t)) = -2 \times 2 \sin\left(\frac{t+2t}{2}\right) \cos\left(\frac{t-2t}{2}\right) = -4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \cos\left(-\frac{t}{2}\right) = -4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

par parité du cosinus

- (e) Calculer $y'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et justifier les égalités :

$$y'(t) = 2(1 - \cos(t))(1 + 2 \cos(t)) = 4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

Par composée et somme de fonctions usuelles, x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$y'(t) = 2 \cos(t) - 2 \cos(2t) = 2 \cos(t) - 2 \times (2 \cos^2 t - 1)$$

$$\text{aussi : } y'(t) = P(\cos t) \quad \text{où } P(x) = -4x^2 + 2x + 2 = 2(-2x^2 + x + 1) = 2(1 - x)(2x + 1)$$

$$\text{d'où } y'(t) = 2(1 - \cos(t))(1 + 2 \cos(t))$$

D'autre part, en utilisant les relations vues en II-2-(b) :

$$y'(t) = 2(\cos(t) - \cos(2t)) = 2 \times -2 \sin\left(\frac{t+2t}{2}\right) \sin\left(\frac{t-2t}{2}\right) = -4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \sin\left(-\frac{t}{2}\right) = 4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

par imparité du cosinus

- (f) Dresser les tableaux de variation des fonctions x et y sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

On précisera les valeurs prises aux bornes de cet intervalle.

Sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos t > 0$ donc $1 + 2 \cos t > 0$ aussi

$x'(t)$ a les zéros et le signe de $-\sin t$ donc : $x'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ et $x'(t) \leq 0$

$y'(t)$ a les zéros et le signe de $1 - \cos(t)$ donc : $y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ et $y'(t) \geq 0$

OU BIEN : $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \frac{3t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \geq 0$, $\cos\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$
donc $x'(t) = -4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \leq 0$ et $y'(t) = 4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$

et les deux dérivées s'annulent lorsque uniquement lorsque $t = 0$

En outre : $x(0) = 2 + 1 = 3$, $y(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

et $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

t	0	$\pi/3$
$x'(t)$	0	-
x	3	$\searrow$ 1/2
y	0	$\nearrow$ $\sqrt{3}/2$
$y'(t)$	0	+

- (g) Déterminer une équation à la tangente à Γ au point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et vérifier qu'elle passe par le point A de coordonnées (2, 0).

Le point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est régulier donc la tangente est la droite $M\left(\frac{\pi}{3}\right) + \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} x'\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}\right)$

$x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$ $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 2$ donc la tangente est dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

P(x, y) est sur la tangente $\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{M(\pi/3)P}, \vec{u}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 1/2 & -\sqrt{3} \\ y - \sqrt{3}/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} + \sqrt{3}y - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 2 = 0$

Une équation de la tangente à Γ en $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est $x + \sqrt{3}y - 2 = 0$

On vérifie que cette tangente passe par A de coordonnées (2, 0) car $2 + \sqrt{3} \times 0 - 2 = 0$

- (h) Déterminer la nature du point M(0) et préciser la tangente à Γ en ce point.

Le point M(0) est stationnaire donc on utilise un développement limité vectoriel pour obtenir la première dérivée en 0 non nulle (qui dirige la tangente) et pour préciser les entiers p et q permettant d'obtenir la nature du point.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right) + \left(1 - \frac{(2t)^2}{2} + o(t^3)\right) \\ 2\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) - \left(2t - \frac{(2t)^3}{6} + o(t^3)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3t^2 + o(t^3) \\ t^3 + o(t^3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}$$

La première dérivée en $t = 0$ est donc obtenue pour $p = 2$ et elle est colinéaire à $-\vec{t}$ donc la tangente en M(0) est horizontale.

La dérivée suivante non colinéaire est obtenue pour $q = 3$ aussi le point M(0) est un point de rebroussement de première espèce.

- (i) Calculer la longueur de Γ .

Tout d'abord, vu la question II-3-(c), il suffit de calculer la longueur ℓ de la portion sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. La longueur de Γ sera alors 6ℓ puisque $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ se découpe en 6 sous-intervalles de longueur $\frac{\pi}{3}$

Par ailleurs, d'après le cours : $\ell = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ mais, avec II-3-(d) et II-3-(e) :

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = 4^2 \sin^2\left(\frac{3t}{2}\right) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + 4^2 \sin^2\left(\frac{3t}{2}\right) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 4^2 \sin^2\left(\frac{3t}{2}\right) \underbrace{\left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)}_{=1} = 4^2 \sin^2\left(\frac{3t}{2}\right)$$

aussi $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 4 \left| \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right| = 4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$ puisque $\sin\left(\frac{3t}{2}\right) \geq 0$ vu que $\frac{3t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{Ainsi : } \ell = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) dt = 4 \left[-\frac{2}{3} \cos\left(\frac{3t}{2}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 4 \times \left(0 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{8}{3}$$

La longueur de Γ est donc de 16 u.l.

- (j) Tracer Γ ainsi que ses tangentes déterminées précédemment sur la feuille de papier millimétrée fournie. On utilisera des couleurs différentes pour les différentes étapes de la construction sans oublier la légende.

On donne $\sqrt{3} \approx 1,73$. Unité : 3 cm.

En noir, tracé sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$. Pour placer $M(\pi/3) : \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$ d'où $3 \times 0.86 = 3 \times 0.8 + 3 \times 0.06 = 2,4 + 0.18 \approx 2,6$ cm dans le repère

Pour la tangente en $M(\pi/3)$, elle passe par $A(2, 0)$!

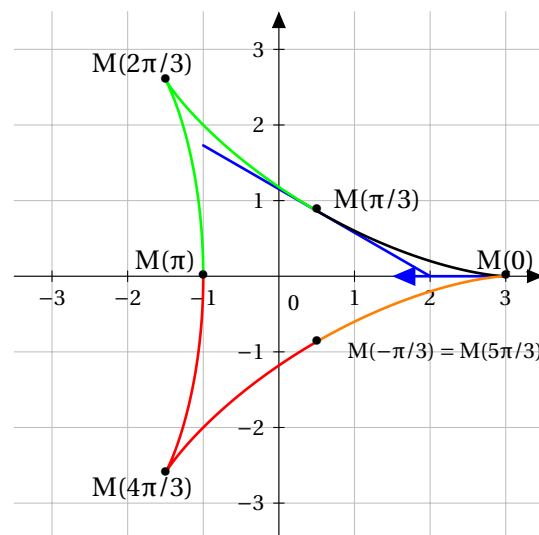
En orange, image de cette courbe par symétrie d'axe (Ox)

ce qui complète la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$

Image de la réunion des deux précédentes par rotation

- de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ en vert;

- de centre O d'angle $\frac{4\pi}{3}$ en rouge.



4. Développée de Γ

(a) Démontrer que le centre de courbure de Γ en un point $M(t)$ est

le point $I(t)$ de coordonnées $(6 \cos(t) - 3 \cos(2t), 6 \sin(t) + 3 \sin(2t))$

D'après le cours :

$\overrightarrow{OI(t)} = \overrightarrow{OM(t)} + R(t)\vec{N}(t)$ où $R(t)$ est le rayon de courbure et $\vec{N}(t)$ le second vecteur du repère de Frénet.

On a : $s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$ aussi $\vec{T}(t) = \frac{1}{s'(t)} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\pi - \frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$

On a alors $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ et on connaît un relèvement $\alpha(t)$ de $\vec{T}(t)$ de sorte que $\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) \end{pmatrix}$

On sait que $\frac{1}{R(t)} = \gamma(t) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{-\frac{1}{2}}{4 \sin\left(\frac{3t}{2}\right)} \Rightarrow R(t) = -8 \sin\left(\frac{3t}{2}\right)$ de sorte que

$$\overrightarrow{OI(t)} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) + \cos(2t) \\ 2 \sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix} - 8 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) + \cos(2t) + 8 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ 2 \sin(t) - \sin(2t) + 8 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

De sorte qu'en utilisant les relations de II-(3)-(d) et II-(3)-(e) :

$$\overrightarrow{OI(t)} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) + \cos(2t) + 2y'(t) \\ 2 \sin(t) - \sin(2t) - 2x'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos(t) + \cos(2t) + 4 \cos(t) - 4 \cos(2t) \\ 2 \sin(t) - \sin(2t) + 4 \sin(t) + 4 \sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cos(t) - 3 \cos(2t) \\ 6 \sin(t) + 3 \sin(2t) \end{pmatrix}$$

On note Γ_1 la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 6 \cos(t) - 3 \cos(2t) \\ y = 6 \sin(t) + 3 \sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

et $I(t)$ désigne le point de Γ_1 de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

(b) Justifier que $f_{a,\theta}(M(t)) = I\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et une valeur de a à préciser, la fonction $f_{a,\theta}$ étant définie dans la question préliminaire.

On vérifie facilement que l'affixe de $I(t)$ est $6e^{it} - 3e^{-2it}$ aussi celle de $I\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ est

$$6e^{i\left(t + \frac{\pi}{3}\right)} - 3e^{-2i\left(t + \frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(6e^{it} - 3e^{-2it} e^{-\frac{2i\pi}{3} - \frac{i\pi}{3}} \right) = 3e^{i\frac{\pi}{3}} \left(2e^{it} + e^{-2it} \right) = 3e^{i\frac{\pi}{3}} z(t) \quad \text{aussi, avec le préambule :}$$

$$f_{a,\theta}(M(t)) = I\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ pour } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ et } a = 3$$

(c) Indiquer une méthode de construction de Γ_1 . Le tracé n'est pas demandé.

La représentation paramétrique de Γ_1 nous assure qu'on obtient la totalité du tracé en traçant la courbe sur un intervalle d'amplitude 2π . Avec la question II-4-(b), on constate qu'en traçant l'image par $f_{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}}$ de Γ où le support représente le $t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, on obtiendra les points $I(t)$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right] = [0, 2\pi]$ et donc Γ_1 en totalité.

Ainsi, il suffit donc d'appliquer à Γ l'homothétie h_3 puis la rotation $r_{\frac{\pi}{3}}$ pour obtenir Γ_1 (l'ordre n'a pas d'importance vu que les 2 transformations commutent)

(d) Soient $t \neq 0 \left[\frac{\pi}{3}\right]$ et $t' \neq 0 \left[\frac{\pi}{3}\right]$.

i. Démontrer que la tangente à Γ en $M(t)$ et la tangente à Γ en $M(t')$ sont orthogonales si et seulement si $t' = t + \pi[2\pi]$

Par les symétries, l'unique point stationnaire en $t = 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ est aussi l'unique point stationnaire sur $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$ et, par les rotations, on retrouve des points stationnaires en $t = 0 + \frac{2\pi}{3}$ et $t = 0 + 2 \times \frac{2\pi}{3}$ sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

La contrainte sur t et t' assure donc que les points $M(t)$ et $M(t')$ seront réguliers et donc que les tangentes sont dirigées respectivement par $\vec{T}(t)$ et $\vec{T}(t')$ (vecteurs tangentiels des repères de Frénet)

Les tangentes seront orthogonales si et seulement si $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t') = 0$. Avec la détermination de $\vec{T}$ de II-4-(a) :

$$\vec{T}(t) \cdot \vec{T}(t') = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t'}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t'}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t'}{2} - \frac{t}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{t'}{2} - \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow t' = t + \pi[2\pi]$$

ii. En déduire, sans calcul, que la tangente à Γ en $M(t)$ et la tangente à Γ_1 en $I(t + \pi)$ sont parallèles.

Γ_1 étant le lieu des centres de courbures de Γ , c'est la développée de Γ et donc on sait aussi, d'après le cours, que c'est l'enveloppe des normales à Γ . Autrement dit, la tangente à $I(t + \pi)$ est la normale à $M(t + \pi)$ donc elle est perpendiculaire à la tangente $\mathcal{T}_{t+\pi}$ de Γ en $M(t + \pi)$. D'autre part, la tangente à Γ en $M(t)$ est, d'après la question précédente, orthogonale à la tangente $\mathcal{T}_{t+\pi}$ de Γ en $M(t + \pi)$. De ce fait, la tangentes à Γ en $M(t)$ et la tangente à Γ_1 en $M(t + \pi)$ sont parallèles car elles sont orthogonales à une même troisième droite $\mathcal{T}_{t+\pi}$

Vous pouvez consulter le rapport sur cette épreuve Maths B de 2021 sur la page <https://www.banquept.fr/article154.html>

1. et 2. Ces questions ont pour objectif de mettre en avant les points de cours qui seront utiles dans la suite.

La question 2. est généralement bien réussie : à noter le "en déduire" de la question 2.(b) qui impose d'utiliser le 2.(a). Certains ont proposé d'autres techniques (passage en complexe avec l'angle moitié) et le rapport ne précise pas comment cela a été évaluée. J'aurai tendance à penser que la totalité des points n'a pas pu être donnée à cause du "en déduire"...

Beaucoup de problème de sens dans vos rédactions sur la question 1 : vous écrivez des symboles = entre des quantités de nature différente : un point M de $\mathbb{R}^2$ n'est pas égale son affixe $z \in \mathbb{C}$, une application $r_\theta \circ h_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ n'est pas égale à un complexe... Ici, les transformations (rotation et homothétie) agissent sur les points et pas sur les affixes ainsi $r_\theta(M)$ a un sens mais pas $r_\theta(z)$... Toutefois, il est courant de nommer de la même manière la transformation géométrique $[r_\theta : M \in \mathbb{R}^2 \mapsto r_\theta(M) \in \mathbb{R}^2]$ et l'application du plan complexe $[z \in \mathbb{C} \mapsto e^{i\theta} z \in \mathbb{C}]$ qui est associée mais il aurait été préférable de le signaler, dans ce cas, sur vos copies que vous utilisez cette abus de notations usuelles.

- 3.(a),(b) et (c) **Vos rédactions sont souvent bien confuses** : il suffisait pourtant de passer d'une égalité vectorielle $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$ à une égalité sur les affixes de ces vecteurs.

De même, dans 3.(b), l'égalité des affixes des points $r_{\frac{2\pi}{3}}(M)$ et $M(t + \frac{2\pi}{3})$ est obtenue souvent avec un tour de passe-passe : il fallait bien souligner l'égalité $e^{-\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{4i\pi}{3} + 2i\pi} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ essentielle pour obtenir le résultat. Comme le souligne le rapport, on peut regretter que, dans vos copies, la rotation laissant Γ invariante n'a bien souvent pas de centre...

La question 3.(c) a été mal traitée (comme pour la plupart des candidats selon le rapport qui parle de « rédaction chaotique »). On peut regretter que beaucoup de mentionne pas la 2π périodicité des fonctions x et y . L'étude de parité est, en général, assez bien évoquée. Souvent, vous parlez d'une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ alors qu'il faut réaliser deux rotations pour obtenir la totalité du tracé. Je vous renvoie vers la correction et le rapport d'épreuve.

On peut aussi finir la construction de la courbe après la symétrie et une rotation à l'aide d'une seconde symétrie :

on trace la courbe sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ puis la portion sur $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ obtenue par symétrie d'axe (Ox) et la portion sur $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ obtenue par la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$ de la portion de courbe sur $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. Il reste alors à refaire une symétrie d'axe (Ox) pour cette portion de courbe : la portion $[0, \pi]$ permet de construire, en effet, la portion de courbe sur $[-\pi, 0]$. On connaît ainsi la courbe sur $[-\pi, \pi]$ d'amplitude 2π donc on connaît toute la courbe par périodicité.

- 3.(d) (e) (f) Il y a encore trop d'étudiant qui oublie de justifier la dérivabilité avant de dériver...

Pour (d) et (e), les résultats étant donnés, il fallait bien détailler les justifications!

Pour obtenir un tableau de variations, on doit justifier le signe et les zéros des dérivées de façon rigoureuse.

- 3 (g) Il fallait préciser que le point $M(\frac{\pi}{3})$ est régulier. Le sujet demande une équation, sous-entendu une équation cartésienne et utiliser cette équation pour vérifier que la tangente passe par le point A .

Certains ont utilisé une expression hors programme (probablement trouvée dans un corrigé) pour l'équation de la tangente au point de paramètre a : « $y - y(a) = \frac{y'(a)}{x'(a)}(x - a)$ » Cette formule n'est pas au programme car elle ne peut être utilisée qu'au point régulier avec une tangente qui n'est pas verticale : ce n'est donc pas une formule générale.

Le programme privilégie le fait que, si le point $M(a)$ est régulier, alors le vecteur $\begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$ qui est non nul dirige la tangente (et ceux même si elle est verticale lorsque $x'(a) = 0$). Dans le cas d'une tangente non verticale ($x'(a) \neq 0$) alors la pente de la tangente sera $\frac{y'(a)}{x'(a)}$ et, puisque la tangente doit passer par le point $M(a)$ de coordonnées $(x(a), y(a))$, on trouve bien l'équation cartésienne évoquée.

- 3(f) Il fallait préciser que le point $M(0)$ est stationnaire. Vous obtenez, en général, le DL vectoriel et concluez sur la nature du point sans préciser la tangente (ici horizontale) qui était pourtant explicitement demandée par le sujet.

- 3(i) Une grandeur physique (ici une longueur ou, par exemple, une aire) doit forcément avoir une unité! Ainsi, il fallait conclure par 16 u.l (pour unité de longueur) et pas simplement 16.

La justification que la longueur recherchée vaut 6 fois celle sur $[0, \frac{\pi}{3}]$ est rarement bien faite.

- (j) L'unité doit toujours figurer sur un graphique. De plus, le sujet demandé explicitement les tangentes déterminées auparavant : il fallait donc, non seulement, placer correctement les points $M(\frac{\pi}{3})$ (en respectant l'unité graphique) et $M(0)$ mais aussi les tangentes. De plus, la tangente en $M(\frac{\pi}{3})$ doit passer par A ! Enfin, le sujet demandé d'utiliser des couleurs différentes pour indiquer les étapes : le tracé sur $[-\frac{\pi}{3}, 0]$ obtenu par symétrie d'axe (Ox) doit donc avoir une couleur différente du tracé initial sur $[0, \frac{\pi}{3}]$. De même, il fallait utiliser deux autres couleurs pour les tracés obtenus ensuite en utilisant la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

- 4(a) En général assez bien fait. Une rédaction totalement hors programme qui ne serait pas acceptée : seule les méthodes du programme sont acceptés à l'écrit! Lorsqu'elle n'est pas réussie, c'est que les étudiants s'enferment avec une mauvaise simplification de $s'(t)$ (alors que celle-ci avait déjà été faite en 3(i)...). On peut regretter que certains ratent le relèvement $\alpha(t) = \pi - \frac{t}{2}$ (voir corrigé)

- (b) et (c) De rédactions parfois brouillonne où la simplification $-e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ n'est pas justifiée. Pour le tracé, il fallait bien insister que l'ordre (homothétie puis rotation ou l'inverse) n'a pas d'importance.

- 4(d) Le fait que $M(t)$ et $M(t')$ sont réguliers sous ces conditions n'a presque jamais été évoqué alors que c'est nécessaire pour affirmer que $\vec{T}(t)$ et $\vec{T}(t')$ dirige les tangentes. Pour finaliser ii), il fallait bien sûr utiliser la caractérisation de la développée comme enveloppe des normales.