

PROBLÈME

Modélisation d'un manège pour enfants.

Le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. *Question préliminaire.* Soit M un point de $\mathbb{R}^2$ d'axe complexe z .

- (a) Donner sans justification l'axe complexe de l'image de M par la rotation r_θ de centre O et d'angle θ
- (b) Donner sans justification l'axe complexe de l'image de M par l'homothétie h_a de centre O et de rapport a avec $a \neq 0$
- (c) Vérifier que $r_\theta \circ h_a = h_a \circ r_\theta$. On note alors $f_{a,\theta} = r_\theta \circ h_a$

2. *Formule de trigonométrie.* On considère 4 réels a, b, p et q .

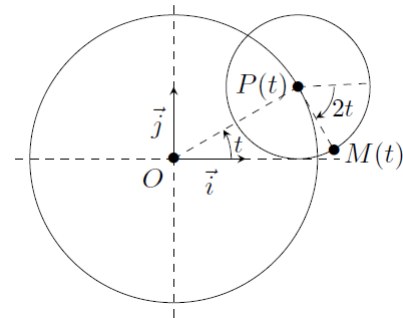
- (a) Donner la linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\cos(b)$ et $\sin(a)\sin(b)$
- (b) En déduire que $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ainsi qu'une factorisation de $\sin(p) + \sin(q)$

Un manège pour enfant est constitué d'une plateforme tournant autour d'un axe, lui-même animé d'un mouvement circulaire. Ce dispositif est schématisé par la figure ci-contre et les mouvements des points $P(t)$ et $M(t)$ sont donnés par :

- L'axe complexe du point $P(t)$ est $2e^{it}$
- L'axe complexe du vecteur $\vec{P}(t)\vec{M}(t)$ est e^{-2it}

On note $z(t)$ l'axe complexe du point $M(t)$ et

Γ la courbe décrite par l'ensemble des points $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.



3. (a) En calculant pour tout réel t l'axe complexe $z(t)$ du point $M(t)$ démontrer qu'une représentation paramétrique de Γ est $\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

(b) Pour tout réel t , comparer les axes complexes de $r_{\frac{2\pi}{3}}(M(t))$ et de $M(t + \frac{2\pi}{3})$
En déduire que Γ est invariante par une rotation à préciser.

(c) Justifier soigneusement que l'on peut réduire l'intervalle d'étude de Γ à $[0, \frac{\pi}{3}]$

(d) Calculer $x'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et justifier les égalités :

$$x'(t) = -2\sin(t)(1 + 2\cos(t)) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

(e) Calculer $y'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et justifier les égalités :

$$y'(t) = 2(1 - \cos(t))(1 + 2\cos(t)) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

(f) Dresser les tableaux de variation des fonctions x et y sur $[0, \frac{\pi}{3}]$.

On précisera les valeurs prises aux bornes de cet intervalle.

(g) Déterminer une équation à la tangente à Γ au point $M(\frac{\pi}{3})$ et vérifier qu'elle passe par le point A de coordonnées (2, 0).

(h) Déterminer la nature du point $M(0)$ et préciser la tangente à Γ en ce point.

(i) Calculer la longueur de Γ .

(j) Tracer Γ ainsi que ses tangentes déterminées précédemment sur la feuille de papier millimétrée fournie. On utilisera des couleurs différentes pour les différentes étapes de la construction sans oublier la légende.

On donne $\sqrt{3} \approx 1,73$. Unité : 3 cm.

4. Développée de Γ

- (a) Démontrer que le centre de courbure de Γ en un point $M(t)$ est

le point $I(t)$ de coordonnées $(6 \cos(t) - 3 \cos(2t), 6 \sin(t) + 3 \sin(2t))$

On note Γ_1 le courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 6 \cos(t) - 3 \cos(2t) \\ y = 6 \sin(t) + 3 \sin(2t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

et $I(t)$ désigne le point de Γ_1 de paramètre $t \in \mathbb{R}$.

- (b) Justifier que $f_{a,\theta}(M(t)) = I(t + \frac{\pi}{3})$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et une valeur de a à préciser, la fonction $f_{a,\theta}$ étant définie dans la question préliminaire.
- (c) Indiquer une méthode de construction de Γ_1 . Le tracé n'est pas demandé.
- (d) Soient $t \neq 0 \left[\frac{\pi}{3} \right]$ et $t' \neq 0 \left[\frac{\pi}{3} \right]$.
- Démontrer que la tangente à Γ en $M(t)$ et la tangente à Γ en $M(t')$ sont orthogonales si et seulement si $t' = t + \pi[2\pi]$
 - En déduire, sans calcul, que la tangente à Γ en $M(t)$ et la tangente à Γ_1 en $I(t + \pi)$ sont parallèles.

