

EXERCICE

Applications directes du cours

1. a. Déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r-3) = 0$ avec deux racines distinctes $r = 2$ ou $r = 3$

L'expression de u_n est donc : $u_n = \lambda 2^n + \mu 3^n$ où λ et μ sont des réels qu'on détermine avec les conditions initiales.

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu = 1 \end{cases} \quad \text{Ainsi : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^n}$$

- b. Trouver les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre d'inconnue y de la variable x qui a la même équation caractéristique que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il s'agit de résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$ et on connaît déjà l'équation caractéristique qui a deux racines $r = 2$ et $r = 3$.

L'expression d'une solution est donc $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

- c. Trouver les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre d'inconnue y de la variable x dont l'équation précédente est l'équation homogène et qui admet $\cos x$ en second membre.

Il s'agit de résoudre $y'' - 5y' + 6y = \cos x$ or on connaît déjà l'expression des solutions homogènes donc il s'agit de rechercher une solution particulière puisque une solution est la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène.

Comme $\cos x = \Re(e^{ix})$, une solution particulière est de la forme $y_p = \Re(z_p)$ où z_p est une solution particulière de $z'' - 5z' + 6z = e^{ix}$.

Le second membre est alors de la forme e^{mx} avec $m = i$ qui n'est pas racine de l'équation caractéristique aussi on cherche la solution sous la forme $z_p(x) = \alpha e^{ix}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$: $z_p(x) = \alpha e^{ix}$, $z'_p(x) = i\alpha e^{ix}$, $z''_p(x) = i^2 \alpha e^{ix} = -\alpha e^{ix}$

$$z''_p(x) - 5z'_p(x) + 6z_p(x) = e^{ix} \Leftrightarrow -\alpha e^{ix} - 5i\alpha e^{ix} + 6\alpha e^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow \alpha 5(1-i) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{5(1-i)} = \frac{1+i}{10}$$

Dès lors : $y_p(x) = \Re\left(\frac{1+i}{10} e^{ix}\right) = \frac{1}{10}(\cos x - \sin x)$ et on peut conclure que

$$\boxed{\text{l'expression finale des solutions est } y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} + \frac{1}{10}(\cos x - \sin x) \quad \text{où } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2}$$

2. a. Déterminer la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0$ avec une racine double $r = 2$

L'expression de u_n est donc : $u_n = (\lambda n + \mu)2^n$ où λ et μ sont des réels qu'on détermine avec les conditions initiales.

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ (\lambda + \mu)2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Ainsi : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n2^{n-1}}$$

- b. Trouver les solutions du problème de Cauchy associé à l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre d'inconnue y de la variable x qui a la même équation caractéristique que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Il s'agit de résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$ et on connaît déjà l'équation caractéristique qui a une racine double $r = 2$.

L'expression d'une solution est $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$ où λ et μ sont déterminés avec les conditions initiales :

$$y'(x) = (2\lambda x + \lambda + 2\mu)e^{2x} \quad \text{et : } \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \quad \text{Ainsi : } \boxed{\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = xe^{2x}}$$

3. a. Déterminer la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = 2w_{n+1} - 4w_n$

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 4 = 0$ de discriminant $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$

Il y a donc deux racines complexes conjuguées $r = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$ ou $r = 1-i\sqrt{3}$

On peut aussi écrire ces racines sous forme exponentielle : $1 \pm i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

L'expression de u_n est : $u_n = 2^n \left(\lambda \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) \right)$ où λ et μ sont déterminés avec les conditions initiales.

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2\left(\frac{\lambda}{2} + \mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{Ainsi : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)}$$

- b. Trouver les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre d'inconnue y de la variable x qui a la même équation caractéristique que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Il s'agit de résoudre $y'' - 2y' + 4y = 0$ et on connaît déjà l'équation caractéristique qui a deux racines complexes conjuguées $r = 1 \pm i\sqrt{3}$. L'expression d'une solution est $y(x) = e^x(\lambda \cos(\sqrt{3}x) + \mu \sin(\sqrt{3}x))$ où λ et μ sont réels.

PROBLÈME

L'objet de ce problème est l'étude de l'application f où $f(x) = \text{Arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}$

On définit, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\text{sg}(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Pour répondre aux questions de la partie II, on pourra faire référence aux résultats de la partie I en précisant clairement le numéro de la question utilisée.

Partie I : Étude de u où $u(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}$

I-1/ Justifier que u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $u'(x)$ pour tout x réel.

- La fonction affine $v = \left[x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right]$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

- $\begin{cases} w_1 = [x \mapsto x^2 + 1] \text{ est } C^0 \text{ et dérivable sur } \mathbb{R} \\ w_2 = [x \mapsto \sqrt{x}] \text{ est } C^0 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et dérivable sur }]0, +\infty[\Rightarrow w = w_2 \circ w_1 = [x \mapsto \sqrt{1+x^2}] \text{ est } C^0 \text{ et dérivable sur } \mathbb{R}. \\ \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \in]0, +\infty[\end{cases}$

- $\begin{cases} v \text{ est } C^0 \text{ et dérivable sur } \mathbb{R} \\ w \text{ est } C^0 \text{ et dérivable sur } \mathbb{R} \Rightarrow u = \frac{v}{w} \text{ est } C^0 \text{ et dérivable sur } \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} \neq 0 \end{cases}$

$$\text{Enfin : } \forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - (x+1) \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{(1+x^2) - x(x+1)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \boxed{\frac{1-x}{\sqrt{2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = u'(x)}$$

I-2/ Donner les limites de $u(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$

En $\pm\infty$: $u(x) \sim_{\pm\infty} \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2}} \sim_{\pm\infty} \text{sg}(x) \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ car $\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$ (Rappel : $x^2 + 1 \sim x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \sim (x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2}$) on a donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ et } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

I-3/ On va justifier que u est à valeurs dans $[-1, 1]$ de deux façons.

I-3-a/ *Preuve analytique* : Donner le tableau de variation de u . Conclure que : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \in [a, 1]$ où $a \in]-1, 1[$ est à préciser.

Sur $\mathbb{R}$, $\sqrt{2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} > 0$ donc $u'(x)$ a le signe et les zéros de $1-x$:

D'après ce tableau de variation, on peut dire que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \in [a, 1] \quad \text{où } a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \in]-1, 1[}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u'(x)$		+	-
u	$-\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$

I-3-b/ *Preuve algébrique*. Justifier le raisonnement par équivalence suivant :

$$\text{Pour } x \text{ réel : } -1 \leq \frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \leq x+1 \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 2(x^2+1)$$

Poursuivre ce raisonnement pour prouver que u est bien à valeurs dans $[-1, 1]$.

De façon analogue, résoudre les équations $u(x) = 1$ et $u(x) = -1$.

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, -1 \leq \frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \leq x+1 \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \quad \text{car } \sqrt{2}\sqrt{x^2+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 2(x^2+1)$$

$$\text{car } \forall a \geq 0, -a \leq t \leq a \Leftrightarrow |t| \leq a \Leftrightarrow 0 \leq t^2 \leq a^2$$

en utilisant la croissance de la fonction $[x \mapsto x^2]$ sur $[0, +\infty[$.

Le raisonnement par équivalence proposé est donc justifié.

Aussi, pour tout x réel : $-1 \leq u(x) \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq 2(x^2 + 1) \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$

Ces équivalence justifie donc que : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \in [-1, 1]$ autrement dit que $\boxed{u \text{ est à valeurs dans } [-1, 1]}$.

Pour x réel :

$$u(x) = 1 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{2}\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow x+1 \geq 0 \quad \text{et} \quad (x+1)^2 = (\sqrt{2}\sqrt{1+x^2})^2 = 2(1+x^2)$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \quad \text{et} \quad (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{et } u(x) = -1 \Leftrightarrow x+1 = -\sqrt{2}\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow x+1 \leq 0 \quad \text{et} \quad (x+1)^2 = (-\sqrt{2}\sqrt{1+x^2})^2 = 2(1+x^2)$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1 \quad \text{et} \quad (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset \quad \text{car il n'y a pas de solution}$$

En définitive, $\boxed{\text{l'équation } u(x) = 1 \text{ possède une unique solution dans } \mathbb{R} \text{ qui est } x = 1}$

et $\boxed{\text{l'équation } u(x) = -1 \text{ n'a pas de solution dans } \mathbb{R}}.$

Partie II : Étude de la fonction f

II-1/ Donner le domaine de définition de f . Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ et en déduire que f n'est ni paire ni impaire.

On a : $f = \text{Arcsin} \circ u$. Or, la fonction Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ donc :

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow u(x) \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ d'après I-3 donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

$$f(0) = \text{Arcsin} \frac{1}{\sqrt{2}} = \text{Arcsin} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = f(0) \quad \underline{f \text{ n'est pas impaire car } f(0) \neq 0 \text{ alors que } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

$$f(1) = \text{Arcsin} \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \text{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2} = f(1)$$

$$f(-1) = \text{Arcsin} 0 = \underline{0 = f(-1)} \quad \underline{f \text{ n'est pas paire car } f(-1) \neq f(1)}.$$

II-2/ Étudier la continuité de f .

D'après I-1, $\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ (d'après I-1)} \\ \text{Arcsin est continue sur } [-1, 1] \\ \forall x \in \mathbb{R}, u(x) \in [-1, 1] \text{ (d'après I-3)} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{f = \text{Arcsin} \circ u \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

II-3/ Montrer que les théorèmes usuels assurent la dérivabilité de f en x pour $x \in \mathbb{R} - \{m\}$ où $m \in \mathbb{R}$ est à préciser.

Établir que $f'(x) = \frac{\text{sg}(m-x)}{(1+x^2)^\alpha}$ pour $x \in \mathbb{R} - \{m\}$ où $\alpha > 0$ est à préciser.

D'après I-3-b, on a vu que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, u(x) \in]-1, 1[$ (en retirant les solutions de $u(x) = \pm 1$)

Aussi, $\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ (d'après I-1) donc aussi sur } \mathbb{R} - \{1\} \\ \text{Arcsin est dérivable sur }]-1, 1[\\ \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, u(x) \in]-1, 1[\text{ (d'après I-3)} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{f = \text{Arcsin} \circ u \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} - \{1\}}$

Par les dérivées usuelles, on a, pour $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a : $f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

$$\text{Or : } 1 - u^2(x) = 1 - \frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{2(1+x^2)} = \frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)} \quad \text{donc } \sqrt{1-u^2(x)} = \frac{|x-1|}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{mais, d'après I-1 : } u'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et donc, finalement : } \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f'(x) = \frac{1-x}{|x-1|} \times \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{On a donc justifié que : } \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, f'(x) = \frac{\text{sg}(1-x)}{1+x^2} = \frac{\text{sg}(m-x)}{(1+x^2)^\alpha} \text{ où } m=1 \text{ et } \alpha=1$$

II-4/ Étudier la dérivabilité de f en m à l'aide du théorème de la limite d'une dérivée

$$\text{Étudions la dérivabilité de } f \text{ en } m=1 : \text{ si } x > 1, f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} -\frac{1}{2} \quad \text{et si } x < 1, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2}$$

Le théorème de la limite d'une dérivée s'applique donc à f sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$:

$$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 1 \text{ mais } f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } 1 \text{ avec } f'_g(1) = \frac{1}{2} \text{ et } f'_d(1) = -\frac{1}{2}}$$

II-5/ Justifier le tableau des variations de f .

D'après II-3, $f'(x)$ a le signe de $1-x$ si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

D'après II-4, f' n'est pas définie en 1 mais $f(1) = \frac{\pi}{2}$.

D'après I-2 : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \frac{\pi}{4}$

Cela justifie le tableau des variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	$-\pi/4$	$\pi/2$	$\pi/4$

II-6/ On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les asymptotes de $\mathcal{C}_f$

Donner les tangentes ou les demi-tangentes aux points A, B et C d'abscisses respectives $-1, 0$ et 1 .

Esquisser la courbe $\mathcal{C}_f$ (Unités graphique : 2 cm pour 1 en abscisse et 8 cm pour π en ordonnée).

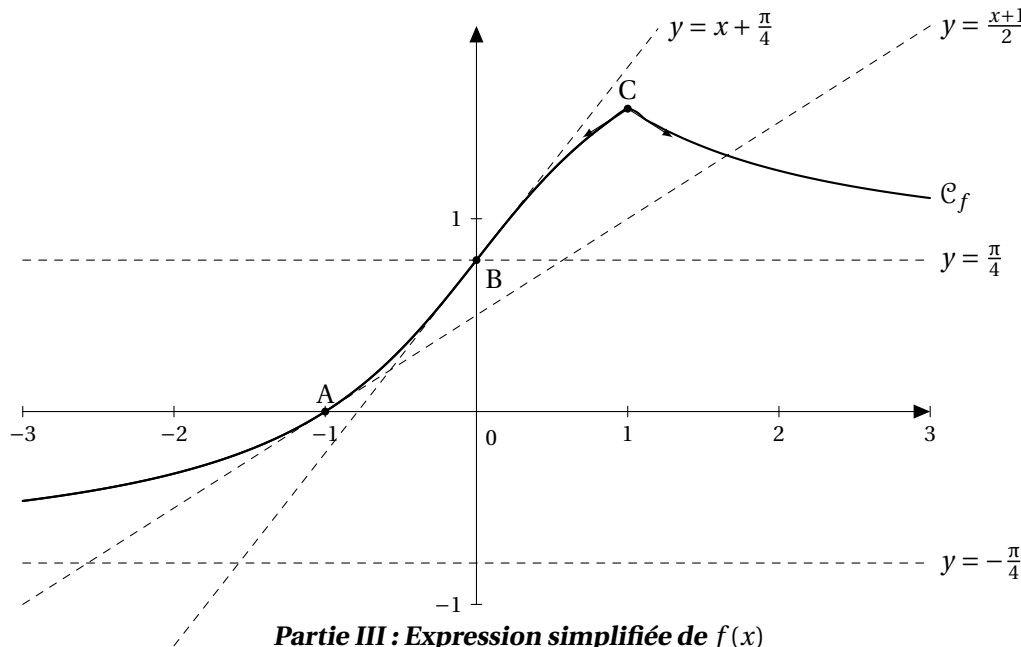
D'après les limites de f en $\pm\infty$, on déduit que $\mathcal{C}_f$ possède deux asymptotes horizontales d'équations $y = -\frac{\pi}{4}$ et $y = \frac{\pi}{4}$.

Comme f est dérivable en -1 et en 0 avec $f'(-1) = \frac{+1}{2}$ et $f'(0) = \frac{+1}{1} = 1$, on peut préciser les tangentes à $\mathcal{C}_f$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse -1 a pour équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{2}$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) \Leftrightarrow y = x + \frac{\pi}{4}$.

On a prouvé que $\mathcal{C}_f$ possède deux demi-tangentes de pente $\pm \frac{1}{2}$ au point C d'abscisse 1 .



III-1/ Prouver que : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x < 1, f(x) = \text{Arctan}(x) + K$ et expliciter K. L'égalité est-elle valable pour $x = 1$?

On a vu, en II-3, que : $\forall x < 1, f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (\arctan x)'$ $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall x < 1, f(x) = \text{Arctan } x + K$

On peut préciser K en évaluant cette égalité valable pour tout $x < 1$ en $x = 0 < 1$. On obtient : $\frac{\pi}{4} = 0 + K$.

Comme $f(1) = \frac{\pi}{2} = \text{Arctan } 1 + \frac{\pi}{4}$, l'égalité reste valable pour $x = 1$. Ainsi : $\forall x \leq 1, f(x) = \text{Arctan } x + \frac{\pi}{4}$

III-2/ Proposer une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x > 1$.

De même : $\forall x > 1, f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} = (-\text{Arctan } x)'$ $\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x > 1, f(x) = -\text{Arctan } x + C$

On détermine C en utilisant un passage à la limite pour x tendant vers $+\infty$ dans cette égalité :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad -\arctan x + C \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} + C \quad \text{conduit à} \quad \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Ainsi : } \forall x > 1, f(x) = -\text{Arctan } x + \frac{3\pi}{4}$$

EXERCICE

Bien traité. Quelques petits conseils de rédaction à voir sur les copies. Attention, le sujet précisé « y de la variable x » et donc c'est maladroit d'écrire $y(t) = \dots$ (et encore plus d'écrire $y(x) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t}$ qui devient carrément faux!) Certains étudiants sont troublés lorsqu'on demande de « donner les solutions d'une équations différentielles » et pas de résoudre un problème de Cauchy. Aussi, ils inventent parfois des conditions initiales qui sont inexistantes dans le sujet. L'expression des solutions d'une équation différentielle fait bien souvent apparaître des constantes d'intégration dont il faut préciser la nature.

PROBLÈME

I-1/ Attention à ne pas oublier les hypothèses lorsque vous utilisez les théorèmes sur la composition et le quotient.

Attention! Ce n'est pas parce que la fonction est définie qu'elle est forcément continue. Le contre-exemple de la fonction $f = [x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor]$ qui vaut -1 sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$ alors que $f(0) = 0$ doit suffire à vous en convaincre.

Pour justifier la continuité et la dérivabilité de u , on utilise deux théorèmes usuels qui nécessitent des hypothèses :

- une composition (pour construire $\sqrt{1+x^2}$) qui nécessite l'hypothèse « $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \geq 0$ » pour la continuité et l'hypothèse « $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$ » pour la dérivabilité. Attention, la racine carrée est continue sur $[0, +\infty[$ mais dérivable sur $]0, +\infty[$!

- un quotient qui nécessite l'hypothèse « $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} \neq 0$ »

Tous les éléments soulignés sont recherchés par le correcteur dans votre justification faute de quoi celle-ci est incomplète...

Le calcul de la dérivée a , par contre, plutôt été bien mené.

I-2/ et I-3-a/ Questions assez bien traitées sous réserve de bien mettre en avant que $\sqrt{x^2} = |x|$. On peut juste regretter que certains ne s'approprient pas des rédactions plus matures à l'aide d'équivalent.

I-3-b/ Cette question a été très mal réussie. Il s'agissait de justifier les équivalences en utilisant le bon argument :

- pour la première, on multiplie par $\sqrt{2}\sqrt{x^2+1} > 0$ donc l'ordre ne change pas

- pour la seconde, il fallait être plus minutieux : $-a \leq x \leq a \Leftrightarrow |x| \leq a$ puis on peut utiliser la croissance du carré sur $[0, +\infty[$

La poursuite du raisonnement n'a, en général, pas posé de problème pour aboutir à la tautologie $(x-1)^2 \geq 0$

Concernant la résolution des équations $u(x) = 1$ et $u(x) = -1$, bien souvent, vous écrivez une équivalence fautive :

$x+1 = \sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \Rightarrow (x+1)^2 = 2(x^2+1)$ mais la réciproque est fautive car, lorsqu'on prend la racine :

$$\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| \text{ et pas } x+1$$

Pour obtenir une équivalence, il faut écrire : $x+1 = \sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 = (\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})^2 = 2(x^2+1)$ et $x+1 \geq 0$

D'ailleurs, faute de ce type de précision, l'absence de solution à l'équation $u(x) = -1$ a souvent été mal justifiée :

$$u(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}} = -1 \Leftrightarrow x+1 = -\sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \quad \text{car } \sqrt{x^2+1} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = (-\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})^2 = 2(x^2+1) \text{ et } x+1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ et } x \leq -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \text{ et } x \leq -1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } x \leq -1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

II-1/ Attention à ne pas confondre le domaine de définition avec le domaine de valeurs de Arcsin :

Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ c'est-à-dire Arcsin(x) existe pour $x \in [-1, 1]$ et alors $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

De ce fait : $f(x) = \text{Arcsin}(u(x))$ existe $\Leftrightarrow u(x) \in [-1, 1] \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ d'après la question I-3.

Le reste de la question a été sinon bien traitée.

II-2/ et II-3/ Certains n'ont pas encore compris l'utilisation du théorème de composition! Ici, $f = \text{Arcsin} \circ u$ est une composée.

Arcsin est continue sur $[-1, 1]$ donc $\text{Arcsin}(u(x))$ sera continue pour les x où $u(x) \in [-1, 1]$ autrement dit pour $x \in \mathbb{R}$: l'hypothèse de composition est donc $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \in [-1, 1]$

Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ donc $\text{Arcsin}(u(x))$ sera au moins dérivable pour les x où $u(x) \in] -1, 1[$. D'après la partie I, on sait que $u(x) \in [-1, 1]$ pour tout x réel mais il faut retirer à $\mathbb{R}$ les réels x où $u(x) = \pm 1$ or on sait que : $u(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ et que $u(x) = -1$ n'a pas de solution. Le théorème de composition ne peut donc s'appliquer que sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et l'hypothèse de composition est donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, u(x) \in] -1, 1[$.

Attention! Les théorèmes usuels sont des implications : f est au moins dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ mais on ne sait rien de la situation en 1 où la fonction peut être ou ne pas être dérivable. Il faut donc faire une étude ponctuelle en $x = 1$ (c'est l'objet de la question II-4) pour justifier la non dérivabilité en $x = 1$.

Attention! L'argument : « je calcule $f'(x)$ et je constate que $f'(x)$ n'est pas définie en 1 donc j'en déduis que f n'est pas dérivable en 1 » n'est pas acceptable. Le calcul des dérivées utilise les théorèmes usuels et il n'est donc valide qu'aux réels où

les théorèmes usuels s'appliquent...C'est une étude ponctuelle qui permet de conclure (recherche de la limite par un taux d'accroissement) ou bien l'utilisation, comme ici, d'un autre théorème d'analyse.

Concernant le calcul de $f'(x)$:

- attention à ce que vous écrivez : $\text{Arcsin}'(u)$ n'est pas $(\text{Arcsin}(u))'$

En effet : $\text{Arcsin}'(u)$ est l'évaluation de la dérivée de Arcsin en u soit : $\text{Arcsin}'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

Alors que, la seconde $(\text{Arcsin}(u))'$ est la calcul de la dérivée de la composée $\text{Arcsin} \circ u$ soit $(\text{Arcsin}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

La simplification de $\sqrt{1-u^2}(x)$ a posée des problèmes à certains (voir le corrigé). Je rappelle que $\sqrt{a^2} = |a|$ et pas a !

II-4/ Plutôt bien fait en général.

II-5/ et II-6/ Si un sujet nomme des points (ici A,B et C), on doit retrouver les points sur votre tracé. Si le sujet demande de préciser les tangentes en ces points, on doit « marquer » les tangentes sur le tracé. De même, si le sujet demande de préciser les asymptotes, celles-ci doivent apparaître dans le tracé.

Attention à bien respecter les unités graphiques quand elles sont données!

III-1/ et III-2/ La question de la validité de l'égalité en $x = 1$ consiste en une vérification d'égalité une fois que K a été trouvé.

J'ai vu de tentatives de raisonnement avec des « on pose » qui on rarement été convainquant (sauf sur une copie) mais ces approches étaient bien compliquées alors qu'il s'agissait ici d'un raisonnement classique d'intégration de la dérivée.

Si $x < 1$ alors $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctan}'(x)$ de sorte qu'en intégrant : $f(x) = \text{Arctan } x + K$ où K est une constante réelle.

La rédaction optimale est : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x > 2, f(x) = \text{Arctan } x + K$ car elle montre bien (par l'ordre des quantificateurs) que K ne dépend pas de x .

Pour déterminer la valeur de K, on peut utiliser une évaluation pour un x vérifiant $x < 1$ (par exemple $x = 0$ ou $x = -1$).

Si $x > 1$ alors $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2} = (-\text{Arctan } x)'$ de sorte qu'en intégrant : $f(x) = -\text{Arctan } x + C$ où C est une constante réel.

Pour déterminer C, on ne dispose pas de réels $x > 1$ dont on connaît l'image dans le sujet...mais on peut utiliser

- soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$ (question II-5) : lorsque x tend vers $+\infty$, l'égalité $f(x) = -\text{Arctan } x + C$ devient $\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + C \Leftrightarrow C = \frac{3\pi}{4}$

- soit la continuité de f en 1 soit $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \frac{\pi}{2}$ de sorte que $f(x) = -\text{Arctan } x + C$ devient $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + C \Leftrightarrow C = \frac{3\pi}{4}$