

« Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur dites,
ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent »
GOETHE (1749-1832), auteur allemand.

EXERCICE Applications directes du cours

1. **a.** Déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
- b.** Trouver les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre d'inconnue y de la variable x qui a la même équation caractéristique que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- c.** Trouver les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre d'inconnue y de la variable x dont l'équation précédente est l'équation homogène et qui admet $\cos x$ en second membre.
2. **a.** Déterminer la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$.
- b.** Trouver les solutions du problème de Cauchy associé à l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre d'inconnue y de la variable x qui a la même équation caractéristique que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
3. **a.** Déterminer la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = 2w_{n+1} - 4w_n$.
- b.** Trouver les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre d'inconnue y de la variable x qui a la même équation caractéristique que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.



PROBLÈME

L'objet de ce problème est l'étude de l'application f où $f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}$

On définit, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{sg}(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Pour répondre aux questions de la partie II, on pourra faire référence aux résultats de la partie I en précisant clairement le numéro de la question utilisée.

Partie I : Étude de u où $u(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}$

I-1/ Justifier que u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $u'(x)$ pour tout x réel.

I-2/ Donner les limites de $u(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$

I-3/ On va justifier que u est à valeurs dans $[-1, 1]$ de deux façons.

I-3-a/ *Preuve analytique* : Donner le tableau de variation de u . Conclure que : $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \in [a, 1]$ où $a \in]-1, 1[$ est à préciser.

I-3-b/ *Preuve algébrique*. Justifier le raisonnement par équivalence suivant :

$$\text{Pour } x \text{ réel : } -1 \leq \frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \leq x+1 \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 2(x^2+1)$$

Poursuivre ce raisonnement pour prouver que u est bien à valeurs dans $[-1, 1]$.

De façon analogue, résoudre les équations $u(x) = 1$ et $u(x) = -1$. Il est bien sûr interdit d'utiliser I-3-a pour prouver I-3-b.

Partie II : Étude de la fonction f

II-1/ Donner le domaine de définition de f . Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ et en déduire que f n'est ni paire ni impaire.

II-2/ Étudier la continuité de f .

II-3/ Montrer que les théorèmes usuels assurent la dérivabilité de f en x pour $x \in \mathbb{R} - \{m\}$ où $m \in \mathbb{R}$ est à préciser.

$$\text{Établir que } f'(x) = \frac{\operatorname{sg}(m-x)}{(1+x^2)^\alpha} \text{ pour } x \in \mathbb{R} - \{m\} \text{ où } \alpha > 0 \text{ est à préciser.}$$

II-4/ Étudier la dérivabilité de f en m à l'aide du théorème de la limite d'une dérivée qu'on admettra :

Théorème de la limite d'une dérivée

"Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$ et soit f est une fonction continue sur I et dérivable sur $I - \{a\}$,

- si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$
(éventuellement dérivable uniquement à droite ou à gauche si a est une extrémité de I)

- si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en a

mais la courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a ."

II-5/ Justifier le tableau des variations de f .

II-6/ On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Préciser les asymptotes de $\mathcal{C}_f$

Donner les tangentes ou les demi-tangentes aux points A, B et C d'abscisses respectives $-1, 0$ et 1 .

Esquisser la courbe $\mathcal{C}_f$ (Unités graphique : 2 cm pour 1 en abscisse et 8 cm pour π en ordonnée).

Partie III : Expression simplifiée de $f(x)$

III-1/ Prouver que : $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x < 1, f(x) = \operatorname{Arctan}(x) + K$ et expliciter K . L'égalité est-elle valable pour $x = 1$?

III-2/ Proposer une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x > 1$.