

Étant donnée deux fonctions f et g ne s'annulant pas au voisinage de a sauf peut être en a ,

- « $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a » lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$
ce qu'on peut écrire $f(x) = g(x) \times \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et qu'on note $f(x) = o_a(g(x))$ (ou $f = o_a(g)$)

Exemples : a) $f(x) = o_a(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

b) $x^2 = o(x)$ en 0 mais $x = o(x^2)$ en $+\infty$

c) En 0 : $x^2 \ln x = o(x)$ mais aussi $x^2 \ln x = o(\ln x)$ ou $x^2 \ln x = o(x \ln x)$

Le "o" permet de regrouper tous les termes qui sont à négliger (et donc qu'on peut oublier) ce qui permet de "nettoyer" une expression en ne gardant que les termes importants localement.

Exemples : En $+\infty$, estimons $f(x) = x^{100} + e^{10^{-10}x} + \cos x$

- « $f(x)$ est équivalente à $g(x)$ au voisinage de a » lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$
ce qu'on peut écrire $f(x) = g(x) \times \psi(x)$ avec $\psi(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ et qu'on note $f(x) \sim_a g(x)$ (ou $f \sim_a g$)

L'équivalent est un outil particulièrement efficace pour la recherche de limite : $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \sim_a g(x) \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$

D'ailleurs, lorsque justement $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \neq 0$, alors $f(x) \sim_a \ell$ (c'est équivalent le plus simple qu'on puisse trouver!)

Attention! Écrire $f(x) \sim_a 0$ n'a donc aucun SENS car on ne peut pas définir cette proposition...

On dispose aussi de l'équivalence : $f(x) \sim_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o_a(g(x))$

Preuve : $f(x) = g(x) + o_a(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + o_a(1) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$

Les DL donnent donc un outil privilégié pour déterminer un équivalent pour une expression : le premier terme non nul du développement limité donne un équivalent.

Exemples : En 0 : $f(x) = xe^x - \ln(1+x) = x(1+x+o(x)) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \sim_0 \frac{3}{2}x^2$

Les opérations compatibles avec les équivalents sont

- les produits et les quotients : $\left\{ \begin{array}{l} f_1(x) \sim_a g_1(x) \\ f_2(x) \sim_a g_2(x) \end{array} \right\} \Rightarrow f_1(x)f_2(x) \sim_a g_1(x)g_2(x)$ et $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim_a \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$

Preuve : $f_1(x) = \Psi_1(x)g_1(x)$ et $f_2(x) = \Psi_2(x)g_2(x)$ où $\Psi_i(x) \rightarrow 1$ donc

$$f_1(x)f_2(x) = \underbrace{\Psi_1(x)\Psi_2(x)}_{\rightarrow 1 \times 1 = 1} g_1(x)g_2(x) \quad \text{et} \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\Psi_1(x)}{\underbrace{\Psi_2(x)}_{\rightarrow \frac{1}{1} = 1}} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$

- le passage à une puissance $\alpha \in \mathbb{R}$: $f(x) \sim_a g(x) > 0$ alors $f(x)^\alpha \sim_a g(x)^\alpha$

Preuve : $\frac{f(x)^\alpha}{g(x)^\alpha} = \frac{e^{\alpha \ln f(x)}}{e^{\alpha \ln g(x)}} = e^{\alpha(\ln f(x) - \ln g(x))} = e^{\alpha \ln \frac{f(x)}{g(x)}} \rightarrow e^{\alpha \times 0} = 1$ car $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1$

- le changement de variables : $f(x) \sim_a g(x)$ et $x = \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow b} a$ alors $f(\varphi(t)) \sim_b g(\varphi(t))$

Attention!

- L'addition n'est pas compatible à cause de termes de même poids pouvant conduire à des non SENS du style : $\left\{ \begin{array}{l} \ln(1+x) \sim_0 x \\ \ln(1-x) \sim_0 -x \end{array} \right\}$ ne permettant pas d'obtenir un équivalent de $\ln(1+x) + \ln(1-x) \dots$

- La composition (par l'extérieur) est fautive en général :

Contre-ex : $x+1 \sim_{+\infty} x$ mais $e^{x+1} \not\sim_{+\infty} e^x$ puisque $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e$ qui ne tend pas vers 1

Contre-ex : $1+x^2 \sim_0 1+x$ (aussi $\sim_0 1$ d'ailleurs...) mais $\ln(1+x^2) \not\sim_0 \ln(1+x)$ puisque $\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)} \sim_0 \frac{x^2}{x} = x \rightarrow 0 \neq 1$

Exercices

- Déterminer un équivalent en $+\infty$ puis en 0 de $f(x) = x + x^2 + 1 - e^x$
- Déterminer un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $g(x) = x + x \ln x + \ln(1 + \sqrt{x})$