

CHAPITRE IX: ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

Dans tout le chapitre, E est un espace vectoriel réel.

I) Produit scalaire et norme

I-1) Définition et exemples usuels

Définition : Produit scalaire

Étant donné un espace vectoriel réel E , un **produit scalaire** sur E est une application $\left[\begin{array}{lcl} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \langle x, y \rangle \end{array} \right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique c'est à dire que : $\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire c'est à dire que : $\forall x_0 \in E, \quad [x \mapsto \langle x_0, x \rangle] \quad \text{et} \quad [x \mapsto \langle x, x_0 \rangle]$ sont linéaires
En pratique, si 1. est prouvé, il suffit seulement de démontrer la linéarité d'une seule des deux applications
3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive et définie c'est à dire que : $\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

On dit qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $E \times E$
Le produit scalaire des vecteurs x et y de E pourra être noté, selon le contexte, $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$ ou encore $x.y$

Remarque : $\forall x \in E, \quad \langle x, 0_E \rangle = \langle 0_E, x \rangle$

Définitions : Espace préhilbertien et espace euclidien

Un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire est appelé **un espace préhilbertien**.
Si, de plus, cet espace vectoriel est de dimension finie, on dit alors que E est **un espace euclidien**

I-2) Les exemples de référence

On va munir les espaces vectoriels classiques de produit scalaire qu'on appellera le **produit scalaire canonique**.

1. Le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est définie par

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

En identifiant $\mathbb{R}^n$ avec l'espace $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes, on a $\langle x, y \rangle = X^T Y$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Généralisation sur un espace de suites : Si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors $\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k$ n'existe pas toujours.

Mais : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Aussi, pour tout k réel : $0 \leq |x_k y_k| \leq \frac{1}{2}(|x_k|^2 + |y_k|^2)$ de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum x_k^2 \text{ converge} \\ \sum y_k^2 \text{ converge} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum x_k y_k \text{ converge absolument (et donc } \langle x, y \rangle \text{ existe)}$$

On peut définir un produit scalaire sur l'espace $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n^2 \text{ converge}\}$ qui est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. Le produit scalaire euclidien de $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ est définie par

$$\forall (f, g) \in C^0([a, b], \mathbb{R})^2, \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Généralisation sur un intervalle I quelconque :

Pour f et g dans $C^0(I, \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t)dt$ n'existe pas toujours. Mais : $\forall t \in I, |f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}(f^2(t) + g^2(t))$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^2 \text{ intégrable sur } I : \int_I f^2(t)dt \text{ converge} \\ g^2 \text{ intégrable sur } I : \int_I g^2(t)dt \text{ converge} \end{array} \right. \Rightarrow \int_I |f(t)g(t)|dt \text{ converge ie } fg \text{ est intégrable sur } I \Rightarrow \langle f, g \rangle \text{ converge.}$$

On peut définir le produit scalaire sur $L_2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f \in C^0(I, \mathbb{R}) \mid \int_I f^2(t)dt \text{ converge} \right\}$ qui est un sev de $C^0(I, \mathbb{R})$

3. Un produit scalaire classique de $\mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est défini par $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$

On peut munir un espace de plusieurs produit scalaire :

$$(P, Q) = \sum_{k=0}^n a_k b_k \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \text{ est un autre produit scalaire classique sur } \mathbb{R}_n[X].$$

4. Le produit scalaire euclidien de $M_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est définie par

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$$

I-3) Norme et distance associées à un produit scalaire**Définitions : Norme et distance dans un espace préhilbertien**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien,

la **norme préhilbertienne** associée est l'application $\left[\begin{array}{l} \|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array} \right]$ et on définit la **distance** entre deux vecteurs x et y de E comme le réel positif $\|x - y\|$

Lorsque $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien, on parle de **norme euclidienne** et de **distance euclidienne**.

Remarque :

1. La définition de la norme est assurée par la positivité : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ d'où $\|x\|$ existe.

2. Le caractère défini du produit scalaire induit que : $\forall (x, y) \in E^2, x = y \Leftrightarrow \|x - y\| = 0$

3. La norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

En particulier, on retrouve les normes usuelles de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$: $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Proposition : Propriété de la norme

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée, on a :

- $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\| =$
- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ (*Identité remarquable*)

I-4) Les égalités et inégalités classiques associées à une norme euclidienne**Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée, on a

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \Leftrightarrow |\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

L'égalité a lieu si et seulement si la famille (x, y) est liée

Théorème : Inégalité triangulaire

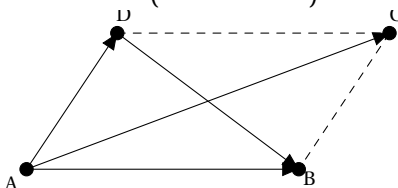
Une norme préhilbertienne vérifie l'inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

L'égalité a lieu si et seulement si la famille (x, y) est liée

Proposition : Identités du parallélogramme et de polarisation

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\|\cdot\|$ la norme associée, on a

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (\text{Identité du parallélogramme})$$



On obtient les formules dites de polarisation qui permettent de retrouver le produit scalaire à partir d'une norme :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

En pratique, lorsqu'on nous demande d'établir une inégalité, il est courant d'obtenir celle-ci en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à des vecteurs bien choisis dans un espace préhilbertien bien choisi. Il est important de bien préciser l'espace E , le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et les vecteurs x et y utilisés quand on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz

EXEMPLE N° 1 Démontrer que, pour tout $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, on a : $\left| \sum_{i=1}^n a_{ii} \right| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2}$

On pourra utiliser le produit scalaire canonique dans $M_n(\mathbb{R})$

II) Orthogonalité dans un espace préhilbertien

Dans cette partie, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ désigne un espace préhilbertien (donc pas nécessairement de dimension finie) et $\|\cdot\|$ est la norme associée.

II-1) Vecteurs orthogonaux et théorème de Pythagore

Définition : vecteurs orthogonaux et famille orthogonale de vecteurs

- Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul i.e. $\langle x, y \rangle = 0$
- Une famille de vecteurs de E est orthogonale si elle est constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux

La famille $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E où I ensemble quelconque est orthogonale lorsque :

$$\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

Proposition :

Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est une famille libre de vecteurs de E

Théorème : dit de Pythagore

Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est une famille orthogonale de E alors $\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$

Dans le cas particulier où $n = 2$, il y a même une équivalence :

$$x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

II-2) Sev orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Définition : Sev orthogonaux

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux lorsque $\forall (x, y) \in F \times G, \langle x, y \rangle = 0$

Proposition :

Si F et G sont des sev orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$ donc la somme de deux sev orthogonaux est forcément directe.

Définition : Orthogonal d'un sev

Si F est un sev de E ,

l'orthogonal de F noté $F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F
autrement dit : $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}$

Proposition : Propriétés de l'orthogonal d'un sev

- $F^\perp$ est également un sous-espace vectoriel de E .
- F et $F^\perp$ sont des sev orthogonaux
- $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$
- $F \subset (F^\perp)^\perp$ Attention, l'inclusion peut être stricte si F n'est pas de dimension finie
- Si F et G sont des sev de E alors : $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$

EXEMPLE N° 2 Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,
 Montrer que : $F \oplus F^\perp = E \Rightarrow (F^\perp)^\perp = F$ Cela sera en particulier vérifié si F est de dimension finie

Proposition : Orthogonal d'un sev de dimension finie

Soit F est un sev de dimension finie de l'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$,
 si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de F alors $F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x, e_i \rangle = 0\}$

EXEMPLE N° 3 On définit, sur $\mathbb{R}_2[X]$: $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$

1. Justifier que $(\mathbb{R}_2[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.
2. Déterminer l'orthogonal de $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$

II-3) Famille orthonormale et procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**Définition : Famille orthonormale (ou orthonormée) de vecteurs**

Une famille de vecteurs de E est orthonormales (ou orthonormée) lorsqu'elle est orthogonale et qu'elle est constituée de vecteurs unitaires (c'est à dire de norme 1)

EXEMPLE N° 4 Dans $E = C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ munit du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$
 on définit, pour tout entier naturel n , $f_n = [t \mapsto \cos(nt)]$ et $g_n = [t \mapsto \sin(nt)]$

1. Montrer que $F = \text{Vect}(f_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ et $G = \text{Vect}(g_n \mid n \in \mathbb{N}^*)$ sont des sev orthogonaux.
2. Montrer que les familles $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont orthonormées.

Exemples de bases orthonormées :

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$
- La base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$
- La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k$ si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$

mais elle ne l'est pas pour d'autre produit scalaire. Par exemple pour $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ alors

$$\langle 1, X \rangle = \int_0^1 1 \times t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

Théorème : Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Si $(e_1, e_2, \dots, e_N)$ où $N \in \mathbb{N}^*$ est une famille libre de vecteurs de E , alors il existe une unique famille orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$ vérifiant :

- $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \quad (1)$
- $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \langle e_n, \varepsilon_n \rangle > 0 \quad (2)$

Vous devez être capable de mettre en œuvre pratiquement l'algorithme pour un nombre restreint de vecteurs.

Mise en œuvre pratique pour l'orthonormalisation de (e_1, e_2, e_3)

1. On construit $\varepsilon_1 =$

2. On cherche ε_2 sous la forme

avec

- $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle = 0$
- ε_2 est unitaire or

3. On cherche ε_3 sous la forme

avec

- $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_3 \rangle = 0 = \langle \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rangle$ déterminant ainsi
- ε_3 est unitaire déterminant ainsi

EXEMPLE N° 5 Déterminer une base orthonormée de l'hyperplan H d'équation $x + y + z + t = 0$ dans $\mathbb{R}^4$

SUITE DE L'EXEMPLE 3 On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire: $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$

3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Corollaire : Existence de base orthonormale pour les sev de dimension finie

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors F possède une base orthonormale qu'on obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à une base quelconque de F .

II-4) Orthogonalité dans un espace euclidien**Proposition : Existence des bases orthonormales dans un espace euclidien**

Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien (donc de dimension finie) alors il existe des bases orthonormales.

Proposition : Calculs dans une base orthonormée

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ les colonnes de coordonnées des vecteurs x et y dans $\mathcal{B}$

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \langle e_i, x \rangle$

- $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y$

- $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{X^T X}$

- Si $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ alors le coefficient situé ligne i colonne j est $[A]_{ij} = \langle e_i, f(e_j) \rangle$

III) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

III-1) Supplémentaire orthogonal en dimension finie

Théorème : Supplémentaire orthogonal en dimension finie

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires c'est à dire que : $F \oplus F^\perp = E$

On dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F dans l'espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Corollaire : Sev orthogonaux et dimension

Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien (càd $\dim E < +\infty$) alors,
pour tout sev F de E , on a $F \oplus F^\perp = E$ de sorte que $\dim F + \dim(F^\perp) = \dim E$

Corollaire : Vecteur normal à un hyperplan d'un espace de dimension finie

Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien (càd $\dim E < +\infty$) munit d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$
l'hyperplan H d'équation $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nul a pour orthogonal la droite vectorielle $H^\perp = \text{Vect}(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n)$. Un vecteur non nul $\vec{n}$ de $H^\perp$ est appelé vecteur normal à l'hyperplan H

III-2) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Définition Projection orthogonale sur un sev de dimension finie :

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on a : $F \oplus F^\perp = E$

On définit la **projection orthogonale sur F** comme le projecteur p_F sur F parallèlement à $F^\perp$

$$\text{Ainsi : } \text{Ker } p_F = F^\perp \text{ et } \text{Im } p_F = \text{Ker } (p_F - id) = F$$

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de F , on a :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i$$

Remarque : Une application linéaire f d'un espace euclidien E est une projection orthogonale lorsque
 $f \circ f = f$ et $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont orthogonaux

Proposition : Caractérisation du projeté orthogonal

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $x \in E$,

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$$

Méthode : Détermination pratique d'un projeté orthogonal

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $x \in E$,
on peut déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F de deux façons :

- soit en déterminant une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de F (obtenue par exemple en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une base quelconque de F) puis en calculant $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i$
- soit en recherchant le vecteur $p_F(x)$ à l'aide des conditions $\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$

SUITE DE L'EXEMPLE N° 5 Expliciter $H^\perp$. Proposer deux méthodes pour calculer le projeté de $u \in \mathbb{R}^4$ sur H .

EXEMPLE N° 6 Dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^4$, on considère le sev F d'équation $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$.

Déterminer la matrice canoniquement associée à la projection orthogonal sur F .

Quelle est la matrice de la symétrie orthogonale ?

Donner la distance de $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$ à F .

III-3) *Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie*

Définition : Distance d'un vecteur à sous-espace vectoriel

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et si $x \in E$, on appelle distance de x à F le réel noté $d(x, F)$ défini par : $d(x, F) = \inf \{ \|x - f\| \mid f \in F \}$

Théorème :

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et si $x \in E$,
alors $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ où $p_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur F

$p_F(x)$ est l'unique vecteur de F qui réalise cette égalité : $\begin{cases} f \in F \\ d(x, F) = \|x - f\| \end{cases} \Leftrightarrow f = p_F(x)$

Remarque : Puisque $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ sont des vecteurs orthogonaux, on a, en vertu du théorème de Pythagore :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$

EXEMPLE N° 7 $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2 dt$