

CHAPITRE III: COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES

I) L'essentiel de la PTSI sur les séries numériques***I-1) Le vocabulaire***

Étant donnée une suite de nombres réels ou complexes $(u_n)_{n \geq n_0}$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé.

- la série associée est notée
- le terme général d'ordre n de la série est
- la somme partielle d'ordre n de la série est
- on dit que la série converge lorsque
- on dit que la série diverge lorsque
- Étudier la nature de la série, c'est
- Deux séries sont de même nature lorsque
- Si la série converge, la somme de la série est
- Si la série converge, le reste d'ordre n de la série est et on a :
- On fixe n_1 et n_2 des entiers naturels supérieurs à n_0 .

Les séries $\sum_{n \geq n_1} u_n$ et $\sum_{n \geq n_2} u_n$

I-2) Les séries de références**1. SÉRIE TÉLESCOPIQUE**

La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est télescopique associée à la suite numérique (a_n) lorsque

- La somme partielle d'ordre n est
- La série est alors convergente si et seulement si
- Si elle converge, la somme de la série est

et le reste d'ordre n est

EXEMPLES a) $\sum (e-1)e^n$ b) $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ c) $\sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$

2. SÉRIE GÉOMÉTRIQUE

La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$ lorsque.....

- La somme partielle d'ordre n est
- La série géométrique est convergente si et seulement si
- Si elle converge, la somme de la série est
et le reste d'ordre n est

3. SÉRIE DE RIEMANN

La série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une série de Riemann lorsque

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si

EXEMPLES

Identifier les séries de référence ci-dessous et préciser leur nature

a) $\sum \frac{1}{n^\pi}$ b) $\sum \frac{1}{\pi^n}$ c) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ d) $\sum \frac{1}{3^{2n}}$ e) $\sum \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$ f) $\sum \frac{1}{n^2 \sqrt{n}}$

I-3) Les théorèmes**1. DIVERGENCE GROSSIÈRE**

Si la série $\sum u_n$ est convergente alors

Si cette condition nécessaire n'est pas réalisée, la série diverge et on dit que.....

2. OPÉRATION SUR LES SÉRIES

- Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum (\alpha u_n)$

Dans le cas où elles convergent, on a : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \alpha u_n = \dots\dots\dots$

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature alors $\sum (u_n + v_n)$
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature convergente alors $\sum (u_n + v_n)$

et, dans ce cas, on a : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \dots\dots\dots$

- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature divergente alors.....

Attention! Pour écrire $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$, il faut s'assurer

EXEMPLES

a) $\sum ((-1)^n + (-1)^{n+1})$ b) $\sum (3^n - 2^n)$

3. CNS DE CONVERGENCE POUR LES SÉRIES À TERMES POSITIFS

Si le terme général de la série $\sum u_n$ garde un signe constant à partir d'un certain rang n_0 ,

- la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ des sommes partielles est une suite
- une série à termes positifs est donc convergente
si et seulement si

4. LIMITE ET SIGNE PAR UN ÉQUIVALENT Si $u_n \sim v_n$ alors $\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$ **5. THÉORÈMES DE COMPARAISON PAR INÉGALITÉ POUR LES SÉRIES À TERMES POSITIFS**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries réelles, alors :

- $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n \text{ (au moins à partir d'un certain rang } n_0) \\ \sum u_n \text{ diverge} \end{array} \right. \Rightarrow \dots\dots\dots$
- $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq u_n \leq v_n \text{ (au moins à partir d'un certain rang } n_0) \\ \sum v_n \text{ converge} \end{array} \right. \Rightarrow \dots\dots\dots \text{ et alors : } \dots\dots\dots$

EXEMPLE Préciser la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + \ln n}$

6. CRITÈRE D'ÉQUIVALENCE POUR LES SÉRIES À TERMES DE SIGNE CONSTANT

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries réelles telles que :

- $\left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ garde un signe constant à partir d'un certain rang} \\ u_n \sim_{+\infty} v_n \end{array} \right. \Rightarrow \dots\dots\dots$

EXEMPLE Préciser la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + (-1)^n \operatorname{Arcsin}(n^{-205})}$

EXEMPLE N° 2 Déterminer la nature de la série de terme général

$$1) u_n = \frac{1}{e^n + (-1)^n \sqrt{n}} \quad 2) u_n = \cos \frac{1}{\sqrt{n}} - \operatorname{ch} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad 3) u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \quad 4) u_n = \ln \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right) \quad 5) u_n = \left(\operatorname{ch} \frac{1}{n} \right)^{-n^3}$$

EXEMPLE N° 3 Justifier l'existence et calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} + \frac{e^{n-1}}{3^{n+1}}$

II) Résultats sur les séries absolument convergente

II-1) Convergence absolue

Définition : Convergence absolue

On dit qu'une série à termes réels ou complexes converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge

Théorème : CVA $\Rightarrow$ CV

Une série absolument convergente est une série convergente

Proposition : Inégalité triangulaire

Si la série $\sum u_n$ converge absolument alors : $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Attention ! La réciproque du théorème CVA $\Rightarrow$ CV est FAUSSE

Contre-exemple : Étude de la série harmonique alternée $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

- Il n'y a pas convergence absolue car $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| =$
- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est pourtant convergente (On parle de semi-convergence).

En effet, on prouve que les sommes partielles (S_n) de cette série convergent. On a : $S_n =$

On connaît la relation pour $x \neq -1$: $\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)}$ qu'on ré-écrit : $\frac{1}{1+x} =$

Si on intègre cette relation sur $[0, 1]$, on a, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$$

On reconnaît (presque) S_n à l'aide d'un changement d'indice :

On obtient ainsi une écriture sous forme intégrale de $I_n = S_n + \int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$

À l'aide de l'inégalité triangulaire et de la croissance de l'intégrale, on prouve $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$:

On a donc justifié : $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} =$

autrement dit $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} =$

II-2) Les théorèmes de convergence absolue**Théorème s**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes complexes (éventuellement réels)

Majoration : Si $|u_n| \leq |v_n|$ à partir d'un certain rang, alors la convergence absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$

Equivalence : Si $u_n \sim v_n$, la convergence absolue de $\sum v_n$ équivaut à celle de $\sum u_n$

Règle du « petit o » : Si $|u_n| = o(|v_n|)$ alors la convergence absolue de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$

Remarque : Le résultat est aussi valable avec un « grand O »

EXEMPLE N° 4 Préciser la nature des séries 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n}}$ 2) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n^2 + \operatorname{Arctan} n}$ 3) $u_n = n^{100} e^{-n^2}$

MÉTHODE : UTILISATION DES RÉSULTATS DE COMPARAISON AVEC DES SÉRIES DE RÉFÉRENCES

- avec une série de Riemann ? : on peut utiliser une domination entre u_n et $\frac{1}{n^\alpha}$
 - on cherche..... si on pense que la série converge car alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

et la convergence absolue de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$

 - on cherche si on pense que la série diverge car alors $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$

et donc, pour n assez grand : $0 < \frac{1}{n^\alpha} \leq u_n$ de sorte que la divergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ entraîne la divergence de $\sum u_n$
- avec une série géométrique ? : on peut utiliser une domination entre u_n et q^n où
 - on cherche si on pense que la série converge car alors $u_n = o(q^n)$

et la convergence absolue de $\sum q^n$ entraîne la convergence absolue de $\sum u_n$

 - on cherche si on pense que la série diverge car alors $q^n = o(u_n)$

et donc, pour n assez grand : $0 < q^n \leq u_n$ de sorte que la divergence de $\sum q^n$ entraîne la divergence de $\sum u_n$

EXEMPLE N° 5 Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\ln n}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement positif distinct de 1 fixé.

Théorème : Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ est une série de nombres réels ou complexes avec $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang

telle que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$ admet une limite $\ell \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ lorsque n tend vers $+\infty$

- Si $\ell < 1$ alors la série converge absolument.
- Si $\ell > 1$ (y compris $\ell = +\infty$) alors la série diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$ (cas douteux) alors on ne peut rien conclure.

Exemples : $\sum \frac{1}{n}$ DV et $\frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ mais $\sum \frac{1}{n^2}$ CV et $\frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Définition : Exponentielle

Pour tout z complexe, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est convergente.

On justifie, à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

On admet que : $\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z) = e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}$

Exemples : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} =$$

II-3) Produit de Cauchy de deux séries absolument convergente

L'objectif de cette partie est de pouvoir calculer le produit de la somme de deux séries : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$

Que pourrait valoir, par exemple, $\exp(z_1) \exp(z_2) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right)$ pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$?

Attention aux conclusions trop rapide : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$

Contre-exemple : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) =$ et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{2^n} =$

Examinons le cas des sommes finies :

$$\left(\sum_{n=0}^n u_n\right) \left(\sum_{n=0}^n v_n\right) = (u_0 + u_1 + \dots + u_n)(v_0 + v_1 + \dots + v_n) = u_0(v_0 + \dots + v_n) + u_1(v_0 + \dots + v_n) + \dots + u_n(v_0 + \dots + v_n)$$

$$\text{Aussi : } \left(\sum_{n=0}^n u_n\right) \left(\sum_{n=0}^n v_n\right) = \sum_{i=0}^n u_i \sum_{j=0}^n v_j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n u_i v_j = \sum_{0 \leq i, j \leq n} u_i v_j$$

On peut calculer cette somme double en sommant les termes sur le tableau des indices $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$ ligne par ligne, colonne par colonne mais aussi sur les diagonales :

$$\left(\sum_{n=0}^n u_n\right) \left(\sum_{n=0}^n v_n\right) =$$

Définition et théorème : Produit de Cauchy

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de nombres réels ou complexes, on appelle produit de Cauchy de ces séries

la série de terme général $w_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k$

On admet alors le théorème suivant :

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors le produit de Cauchy converge aussi (absolument)

$$\text{et : } \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

Exemple On pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n-k} k!}$. Justifier l'existence et calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

Appliquons le théorème à l'exponentielle : $\sum \frac{z_1^n}{n!}$ et $\sum \frac{z_2^n}{n!}$ sont absolument convergentes donc

Proposition : Exponentielle d'une somme

Pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\exp(z_1) \exp(z_2) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2)$$

III) Compléments sur les séries à termes réels

III-1) Technique de comparaison série-intégrale

Il s'agit de comparer les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ avec des intégrales $\int_{n_0}^n f(t) dt$ lorsque f est une fonction positive et monotone sur $[n_0, +\infty[$

Je vous conseille un raisonnement en 3 étapes :

1. on fait un dessin permettant de trouver les inégalités entre $f(k)$ et les intégrales $\int_{k-1}^k f(t) dt$ et $\int_k^{k+1} f(t) dt$ en comparant les aires sous la courbe avec les aires de rectangle de hauteur $f(k)$ sur les segments $[k-1, k]$ et $[k, k+1]$
2. On justifie rigoureusement les inégalités précédentes
3. On utilise les inégalités pour encadrer les sommes partielles de $\sum_{n \geq n_0} f(n)$

(Voir Fiche méthodologique)

Exemple classique Retrouver, à l'aide d'un raisonnement série/intégrale, que : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

EXEMPLE N° 6 Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ à l'aide d'une comparaison série/intégrale.
Proposer un équivalent de la somme partielle.

III-2) Le théorème des séries alternées**Théorème des séries alternées :**

Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0 alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Dans ce contexte, la somme de la série est toujours comprise entre 2 sommes partielles consécutives

et on possède une majoration du reste : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq |u_{n+1}|$

Démonstration

Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0

i) $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante càd

ii) $(u_n)_{n \geq 0}$ est à termes positifs

On considère les sommes partielles $S_n =$

Limite de $(S_{2n+1} - S_{2n})$:

Monotonie de (S_{2n}) : la suite (S_{2n}) est car

Monotonie de (S_{2n+1}) : la suite (S_{2n+1}) est car

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes de ce fait

et, par conséquent, la suite (S_n) converge et on a l'encadrement :

$$S_{2n} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k \leq S_{2n+1}$$

On obtient l'inégalité sur le reste à partir de cet encadrement :

Corollaire du théorème des séries alternées

Si la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers 0 à partir d'un certain rang alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Attention! Les encadrements sur la somme et sur le reste ne sont plus valables dans ce cas.

EXEMPLE N° 7 Démontrer que la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ converge sans converger absolument

Attention! Ne pas oublier l'hypothèse de décroissance...

Contre-exemple : La série $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}$ est alternée avec un terme général qui tend vers 0 mais ne converge pas.

Attention! Expliquer l'erreur de l'élève bêta :

« $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + o(\sqrt{k})} \sim \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ or $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge par le théorème des séries alternées donc ça converge »