

CHAPITRE II: COMPLÉMENTS D’ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est l’un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Produit de sous-espaces vectoriels

Proposition : Produit d’un nombre fini d’espaces vectoriels

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, lorsque $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, alors

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p = \prod_{i=1}^p E_i \text{ est encore un espace vectoriel sur le corps } \mathbb{K}$$

pour les lois naturelles : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \forall (y_1, \dots, y_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \forall \alpha \in \mathbb{K},$
 $\alpha(x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) =$

Le vecteur nul est $(0, \dots, 0)$ et l’opposé de $(x_1, \dots, x_p)$ est $(-x_1, \dots, -x_p)$

Si les p espaces vectoriels sont de dimensions finies alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est de dimension finie avec

$\dim(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) =$

II) Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe de sous-espaces vectoriels

II-1) Sous-espace vectoriels supplémentaires (Rappel PTSI)

EXEMPLE N° 1

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère F le sev défini par les équations $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$ et $G = \text{Vect}\left((1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\right)$.

Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$

EXEMPLE N° 2

On se donne un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On définit alors $S_Q = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid Q \text{ divise } P\}$. Démontrer que S_Q est un supplémentaire de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$

II-2) Somme d’un nombre fini de sous-espaces vectoriels

On généralise la notion de somme de sev rencontrée pour 2 sev à n sev.

Proposition et définition : Somme finie de sous-espace vectoriel

Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E ($p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$), on définit

$$F_1 + \cdots + F_p = \sum_{i=1}^p F_i = \left\{ x \in E \mid \exists (x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p, x = \sum_{i=1}^p x_i \right\} = \left\{ x_1 + x_2 + \cdots + x_p \mid \forall i \in [1, p]; x_i \in F_i \right\}$$

C’est un sev de E et c’est le plus petit, au sens de l’inclusion, des sev de E qui contient tous les F_i .

II-3) Somme directe de sous-espace vectoriel

Définition : Somme directe d’un nombre fini de sous-espace vectoriel

Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E ($p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$),

on dit que la somme $F = \sum_{i=1}^p F_i$ est directe lorsque tout vecteur de F se décompose de manière unique selon les

$(F_i)_{i \in [1, p]}$ autrement dit $\forall x \in F = \sum_{i=1}^p F_i, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_p, x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$

On note alors : $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p = \bigoplus_{i=1}^p F_i$

Caractérisation d'une somme directe

Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E ($p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$),

la somme $F = \sum_{i=1}^p F_i$ est directe $\Leftrightarrow 0_E$ a pour unique décomposition dans la somme la décomposition triviale

$$\text{c'est à dire : } \quad \forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p, \quad \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0_E$$

EXEMPLE N° 3 On considère l'espace vectoriel réel $E = C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et les sous-ensembles suivants:

- F l'ensemble des fonctions constantes de E
- G l'ensemble des fonctions de E nulles sur $[-1, 0]$
- H l'ensemble des fonctions de E nulles sur $[0, 1]$

Démontrer que $E = F \oplus G \oplus H$

Cas particulier de deux sev :

Si F et G sont des sev de E , alors : $F + G$ en somme directe $\Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\}$

Attention il n'y a pas de généralisation $F \cap G \cap H = \{0_E\} \not\Rightarrow F, G$ et H en somme directe

Contre-exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, $F = \text{Vect}((1, 0))$, $G = \text{Vect}((0, 1))$ et $H = \text{Vect}((1, 1))$

Proposition et définition : Base adaptée à une décomposition en somme directe

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, on considère des bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p$ respectivement de $F_1, F_2, \dots, F_p$.

Si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont en somme directe, alors

$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$ est une base de $\bigoplus_{i=1}^p F_i$: c'est une base adaptée à la décomposition $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Corollaire : dimension d'une somme directe

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sev d'un espace vectoriel de E de dimension finie,

si $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont en somme directe, alors $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim F_i$

Méthodologie : Comment justifier que $\bigoplus_{i=1}^p F_i = E$ si $\dim E < +\infty$?

1. On commence par justifier que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe en montrant que 0 admet pour seule décomposition $0 = 0 + \dots + 0$
2. On vérifie alors que $\dim F_1 + \dots + \dim F_p = \dim E$
3. On peut alors conclure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dim \bigoplus_{i=1}^p F_i = \text{par 1} \dim F_1 + \dots + \dim F_p = \text{par 2} \dim E \\ \bigoplus_{i=1}^p F_i \subset E \end{array} \right. \Leftrightarrow \bigoplus_{i=1}^p F_i = E \quad \text{avec le résultat} \left\{ \begin{array}{l} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array} \right. \Leftrightarrow F = G$$

II-4) Sous-espace vectoriel stables

Définitions : sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme et endomorphisme induit

Étant donné $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E , le sous-espace vectoriel F est stable par u si $u(F) \subset F$

La restriction $v = u|_F$ de u à F est alors un endomorphisme de F appelé l'endomorphisme induit par u sur F .

Remarques : On peut toujours définir la restriction $u|_F$ même si F n'est pas stable par u . Dans ce cas, c'est toujours une application linéaire de $\mathcal{L}(F, E)$ mais ça n'est pas forcément un endomorphisme de F !

Exemple : Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel, $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont des sous-espaces stables par f
Si p est un projecteur, l'endomorphisme q induit par p sur $\text{Im } p$ est injectif

EXEMPLE N° 4 On considère φ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = X^2 P' - (2X + 1)P$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}[X]$
2. Justifier que $F = \mathbb{R}_2[X]$ est stable par φ . On note $\tilde{\varphi}$ l'endomorphisme induit.
3. Donner la matrice de $\tilde{\varphi}$ dans la base canonique de F

Si E est un espace de dimension finie et si F est un sev de E stable par l'endomorphisme u .

Considérons une base $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ de F qu'on complète en une base de $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E .

Précisons alors la matrice de u dans cette base E qu'on dit adaptée à la stabilité de F par u :

F étant stable par $u : \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_k)$

on en déduit la forme de la matrice :

Caractérisation matricielle en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie rapportée à une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$

- si F est un sev de E de dimension p stable par u et si $\mathcal{B}$ est une base adaptée, on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} A \in M_p(\mathbb{K}) \\ B \in M_{p, n-p}(\mathbb{K}) \\ C \in M_{n-p, n-p} \end{cases}$$

- si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ où $\begin{cases} A \in M_p(\mathbb{K}) \\ B \in M_{p, n-p}(\mathbb{K}) \\ C \in M_{n-p, n-p} \end{cases}$ alors $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est un sev stable par u

Remarque : Si $E = F \oplus G$ où F et G sont tous les deux stables par l'endomorphisme u de E alors

dans une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ adaptée, on a : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) =$

III) Hyperplan

Définition : Hyperplan

On appelle hyperplan de l'espace vectoriel E de dimension finie un sous-espace vectoriel de E qui admet une droite vectorielle comme supplémentaire autrement dit

H est un hyperplan de E si H est un sev de E et s'il existe $a \in E$ avec $a \neq 0$ et $E = H \oplus \text{Vect}(a)$

Caractérisation par la dimension des hyperplans

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ alors

les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$

Remarque : Comme il n'y a pas d'unicité du supplémentaire, il n'y a pas unicité du vecteur a définissant le supplémentaire de H . En fait, si H est un hyperplan de E alors : S est un sev avec $E = S \oplus H \Leftrightarrow \exists a \in E - H, S = \text{Vect}(a)$

Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont donc

repérées par une équation

Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont donc

repérés par une équation

Théorème : équation d'un hyperplan

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$,

H est un hyperplan de $E \Leftrightarrow H = \text{Ker } \varphi$ où $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est non nulle

Dés lors, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E :

$$H = \left\{ x \in E \mid \varphi(x) = 0_E \right\} = \left\{ x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mid (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ et } x_1 \underbrace{\varphi(e_1)}_{=a_1 \in \mathbb{K}} + \dots + x_n \underbrace{\varphi(e_n)}_{=a_n \in \mathbb{K}} = 0 \right\}$$

autrement dit : $\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in H \Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$

L'hyperplan H est ainsi repérée, dans la base $\mathcal{B}$, par une équation linéaire $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ non triviale (l'un des scalaires a_i au moins est non nul)

Réciproquement, un sous-ensemble de E caractérisée par une équation linéaire non triviale dans une base (quelconque) de E est un hyperplan.

Remarque : Si H est un hyperplan de l'espace vectoriel E de dimension finie, alors

il n'y a pas unicité de l'équation linéaire définissant H . En fait, toutes les équations de H sont proportionnelles

EXEMPLE N° 5 Justifier, sans calcul, que F et G sont des espaces vectoriels et préciser la dimension:

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_n\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t) dt = 0\}$$

EXEMPLE N° 6 On définit H comme l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont la somme des coefficients est nulle. Justifier que H est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ et préciser une base de H

Théorème : Équations d'un sous espace vectoriel en dimension finie

Si E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$

- l'intersection de p hyperplans de E est un espace de dimension au moins $n - p$
- un sev de dimension $n - p$ est une intersection de p hyperplans de E

Interprétation géométrique des solutions d'un système linéaire

Considérons un système linéaires (S) homogène associé à une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Chacune des lignes de ce système correspond à une équation linéaire d'un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.
L'ensemble des solutions du système est donc l'intersection de p hyperplans de $\mathbb{K}^n$: c'est donc un sev de $\mathbb{K}^n$ de dimension au moins $n - p$ d'après le résultat précédent. Elle sera égale exactement à $n - p$ si les lignes de A sont linéairement indépendantes.

Exemple : Sans résoudre les systèmes prévoir la dimension de l'ensemble des solutions pour

$$(S_1) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}, \quad (S_2) : \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad (S_3) : \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

IV) Trace

On notera $[M]_{ij}$ le coefficient situé à la ligne i colonne j de la matrice M lorsque $M \in M_{np}(\mathbb{K})$ où $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$

Définition : Trace d'une matrice carrée

Si A est une matrice carrée, on appelle trace de A qu'on note $\text{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A .

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n [A]_{ii}$$

Proposition : Linéarité de la trace

La trace est une application linéaire : $\left[\begin{array}{ccc} \text{tr} : M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \text{tr}(A) \end{array} \right] \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

Autrement dit : $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \text{tr}(\alpha A + B) = \alpha \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

EXEMPLE N° 7 On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer $\text{tr}(A)$, $\text{tr}(B)$, $\text{tr}(AB)$ et $\text{tr}(BA)$

Proposition : Commutativité de la trace

La trace est commutative c'est à dire que $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2, \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Proposition : Trace et transposition

Si $A \in M_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$

EXEMPLE N° 8 Justifier $F = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ est un sev de $M_n(\mathbb{K})$ dont on précisera la dimension

EXEMPLE N° 9 Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'ensemble des couples (A, B) de $M_n(\mathbb{K})^2$ solutions de $AB - BA = I_n$?

V) Déterminant d'une matrice carrée

V-1) Définition du déterminant

Théorème (admis) et définition : Déterminant d'une matrice carrée

Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qu'on appelle le déterminant telle que :

- i) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ;
- ii) l'échange de 2 colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 (antisymétrique par rapport aux colonnes) ;
- iii) le déterminant de la matrice I_n vaut 1

On notera $\det A$ le déterminant de la matrice A

Dans le cas $n = 2$, on a : $\det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

On rappelle qu'on peut interpréter géométriquement ce déterminant dans le plan :

Dans le cas $n = 3$, le déterminant coïncide avec la notion de produit-mixte de géométrie dans l'espace :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

On rappelle qu'on peut interpréter géométriquement ce déterminant dans l'espace :

On généralise la notation précédente : Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ alors $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

V-2) Propriétés du déterminant

Propositions : Opérations sur les déterminants

Si on note C_j la colonne j de la matrice A :

- Pour $1 \leq i < j \leq n$, alors $\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$
autrement dit le déterminant est multiplié par -1 si on réalise l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$
- Pour tout scalaire α , $\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i + \alpha C_j, \dots, C_n)$ à cause de i)
autrement dit le déterminant est invariant par les opérations $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$
- Si $C_j = kC_i$ avec $k \in \mathbb{K}$,
 $\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j - kC_i, \dots, C_n)$ en utilisant $C_j \leftarrow C_j - kC_i$
 $= \det(C_1, \dots, C_i, \dots, O_{n,1}, \dots, C_n) = 0$ par linéarité selon la colonne j
autrement dit le déterminant est nul s'il possède deux colonnes colinéaires

en particulier : le déterminant est nul s'il l'une des colonnes est nulles ou s'il y a deux colonnes identiques.
et même : le déterminant est nul si les colonnes de A sont liées

- Pour tout scalaire α , $\det(\alpha A) = \det(\alpha C_1, \dots, \alpha C_i, \dots, \alpha C_n) = \alpha^n \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_n) = \alpha^n \det(A)$
par linéarité selon les n colonnes autrement dit $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

Proposition (admis) : Déterminant d'une transposée

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors $\det(A^T) = \det A$

COROLLAIRE : Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes

Proposition (admis) : Déterminant d'un produit

Si $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$ alors : $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$

Proposition : Déterminant et matrice inversible

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors

A est inversible notée $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ et, dans ce cas : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

V-3) Calcul du déterminant par développement**Méthode (admis) : calcul du déterminant par développement**

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle mineur associée au coefficient a_{ij} de A le déterminant Δ_{ij} d'ordre $n - 1$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de A

On dit

- qu'on calcule le déterminant en développant selon la colonne j de A avec : $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$
- qu'on calcule le déterminant en développant selon la ligne i de A avec : $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$

EXEMPLE N° 10 Calculer $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

Proposition : déterminant d'une matrice triangulaire

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure, alors son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux.

Remarque 1 : C'est donc aussi le cas pour une matrice diagonale!

Remarque 2 : Attention au signe pour des matrices triangulaires par rapport à l'anti-diagonale...

EXEMPLE 10.5 Calcul d'un déterminant tri-bandes d'ordre n

Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la valeur du déterminant d'ordre n : $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

V-4) Déterminant d'une famille de vecteurs**Définition : Déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n**

Si E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel avec $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ rapporté à une base $\mathcal{B}$ pour une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E , on définit le déterminant de cette famille relativement à la base $\mathcal{B}$, qu'on note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ comme le déterminant de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \in M_n(\mathbb{K})$

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Ce déterminant hérite donc des propriétés du déterminant des matrices carrées

Caractérisation des bases par le déterminant :

Si E est un espace de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E

- $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E $\Leftrightarrow$ $(x_1, \dots, x_n)$ est libre
 $\Leftrightarrow$ Pour toute base $\mathcal{B}$ de E , $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$
 $\Leftrightarrow$ Il existe une base $\mathcal{B}$ de E avec $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

Méthode : Application pour la recherche de l'équation d'un hyperplan

Si E est un espace de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_{n-1})$ une base de l'hyperplan H de E

$$x \in H \Leftrightarrow \text{Pour toute base } \mathcal{B} \text{ de } E, \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x) = 0$$

EXEMPLE N° 11 *Diverses utilisations des déterminants*

- Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne $A(-2, 1, 1)$, $B(2, 2, -1)$ et $C(4, 0, 3)$. En admettant que c'est le sixième du volume du parallélépipède construit sur $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$, calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
- Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?
 - $P = 1 + X + X^2$, $Q = -1 + 2X - X^2$ et $R = -1 + 8X - X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
 - $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans $M_2(\mathbb{R})$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur le scalaire a pour que $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ soit inversible.
- Avec les notations de la question 2, donner une équation de l'hyperplan dans la base canonique adaptée:
 - $H = \text{Vect}(P, Q)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$
 - $H = \text{Vect}(A, B, C)$ dans $M_2(\mathbb{R})$

VI) Matrices semblables

VI-1) Définition et caractérisation

Définition : Matrice semblable

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$, on dit que les matrices A et B sont semblables lorsqu'il existe une matrice P inversible (càd $P \in GL_n(\mathbb{K})$) telle que : $B = P^{-1}AP$

C'est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$ puisque :

- c'est une relation
- c'est une relation
- c'est une relation

Théorème : Caractérisation des matrices semblables

Deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes d'un espace E de dimension n .

Proposition : Des invariants par similitude

Deux matrices semblables ont le même rang, la même trace et le même déterminant.

Attention ! Il s'agit seulement de condition nécessaires...

EXEMPLE N° 12 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, les matrices suivantes sont-elles semblables à A ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Comparer } \text{rg}(A_3 - I_3) \text{ et } \text{rg}(A - I_3)$$

VI-2) Trace et déterminant d'un endomorphisme**Définitions : trace et déterminant d'un endomorphisme**

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace de dimension finie alors on définit la trace de f notée $\text{tr}(f)$ et le déterminant de f noté $\det(f)$ comme la trace et le déterminant de la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E

Propositions :

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f et g des endomorphismes de E ,

- Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , $\det f =$
- Si $\alpha \in \mathbb{K}$, $\det(\alpha f) =$
- $\det(f \circ g) =$
- f est un automorphisme $\Leftrightarrow$

EXEMPLE N° 13 On définit f sur $\mathbb{R}_n[X]$ par: $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad f(P) = X^2 P'' + P(-1)$.

Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa trace et son déterminant.