

CHAPITRE XIII: INTÉGRALES À PARAMÈTRE

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ sera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on s'intéresse à l'étude d'intégrale du type

$$F(x) = \int_J f(x, t) dt \quad \text{où} \quad \begin{cases} x \text{ est le paramètre } (x \in \mathbb{R}) \\ t \text{ est la variable intégrée} \end{cases} \quad \text{et} \quad f(x, t) \in \mathbb{K} \quad \text{où } t \in J \text{ qui est un intervalle de } \mathbb{R}$$

EXEMPLE N° 1

I. Préciser, dans chaque cas, le paramètre d'une part, l'expression et l'intervalle d'intégration d'autre part.

1. $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$ où x est le paramètre et f d'expression :

2. Si $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $\hat{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$ où x est le paramètre et f d'expression :

3. $G(a) = \int_0^\pi \sin(a \sin x) dx$ où a est le paramètre et f d'expression :

L'objectif est d'apprendre à étudier la régularité de ces fonctions :

- déterminer le domaine de définition c'est à dire les paramètres x pour lesquels $F(x)$ existe
- étudier la continuité de F selon ce paramètre x
- étudier la dérivabilité de F selon ce paramètre x et le calcul de la dérivée

Attention! Ne pas confondre la notion d'intégrale à paramètre $\int_J f(x, t) dt$

avec la notion d'intégrale dépendant de ses bornes $\int_a^{u(x)} f(t) dt$ (rencontrée en PTSI)

Une intégrale dépendant de ses bornes se traite en introduisant judicieusement des primitives.

EXEMPLE N° 0 : Justifier que les applications suivantes sont dérivables et calculer la dérivée lorsque c'est possible

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

I) Définition

Il s'agit, à x fixé dans $\mathbb{R}$, d'étudier la convergence de $\int_J f(x, t) dt$. Il s'agit donc :

- étudier la continuité de $[t \mapsto f(x, t)]$ (à x fixé) sur l'intervalle J pour identifier les problèmes de convergence.
Remarque : Si J est un segment, la continuité de $[t \mapsto f(x, t)]$ (à x fixé) suffit pour justifier la convergence de $F(x)$.
- étudier le signe de $f(x, t)$ au voisinage de ces problèmes ce qui, s'il n'est pas de signe constant, conduit à envisager l'étude de l'intégrabilité de f (autrement dit la convergence de $\int_J |f(x, t)| dt$)
- utiliser les théorèmes de comparaison, le critère d'équivalence ou le théorème de domination pour utiliser les intégrales de référence afin de préciser la nature de l'intégrale.

SUITE EXEMPLE N° 1

- II.** Donner le domaine de définition de la fonction définie par l'intégrale à paramètre dans chacun des cas.
Pour le 3), on pourra être amené à distinguer les cas $x > 0$, $x = 0$ et $x < 0$

II) Continuité

Il arrive souvent que le sujet "zappe" l'étude du domaine de définition pour demander directement de justifier la continuité de l'intégrale à paramètre sur un intervalle I qu'il précise. On utilise alors directement le théorème suivant dont la démonstration est admise.

Théorème : Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et $[f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}]$,

la fonction $\left[F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt \right]$ est continue sur l'intervalle A lorsque

- i. pour tout $x \in A$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est continue sur I
- ii. pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est continue sur A
- iii. il existe une fonction φ (positive, continue et) intégrable sur I telle que : $\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$
(hypothèse de domination)

Remarques :

- i. et ii. peuvent s'obtenir trivialement à partir de « f est C^0 sur $A \times I$ » (f étant une fonction de deux variables)
- Ce théorème est un théorème qui permet d'intervertir un symbole $\lim$ avec un symbole $\int_I$. En effet :

$$F \text{ est continue en } x_0 \in A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \int_I f(x, t) dt = \int_I f(x_0, t) dt = \int_I \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) \right) dt$$
- Il faut bien "comprendre l'utilité des hypothèses" :
 i. et iii. assure la définition de $F(x)$ pour x dans A car, avec le théorème de comparaison, on justifie l'intégrabilité de $[t \mapsto f(x, t)]$ et la continuité en x ne pourrait pas être obtenue sans avoir la continuité partielle de f en x aussi
 ii. est absolument nécessaire
- **La continuité est une propriété locale** aussi, dans des cas où la domination sur I n'est pas possible, le sujet peut (doit d'après le programme) vous proposer de justifier la continuité en utilisant une domination locale.
 Il s'agit de travailler d'abord sur un domaine A_a où la domination est possible avec $A = \bigcup_{a \in A} A_a$.
 Par exemples : $[0, +\infty[= \bigcup_{A>0} [0, A]$, $\mathbb{R} = \bigcup_{A>0} [-A, A]$, $]0, +\infty[= \bigcup_{0<a<A} [a, A]$ ou $] -1, 2[= \bigcup_{\varepsilon \in]0, 1[} [-1 + \varepsilon, 2 - \varepsilon]$
- Le programme ne propose plus de corollaire pour simplifier les hypothèses dans le cas particulier où $I = [a, b]$.
 Toutefois, on peut remarquer que, dans ce cas simple, un argument de continuité de f permet de conclure...

SUITE EXEMPLE 1 III. Étudier la continuité de la fonction définie par l'intégrale à paramètre dans l'exemple 1

Conseils :

- 1/ on commence par préciser les notations (qui est $f(x, t)$? qui est le paramètre x et où varie-t-il $x \in I$ = ??
 qui est la variable intégrée t et où varie-t-elle $t \in J$ = ??
- 2/ on énonce le théorème qu'on va utiliser en contextualisant les hypothèses
- 3/ on commence une démonstration pour tenter de justifier les différentes hypothèses

1) Continuité sur $\mathbb{R}$ de $\hat{\varphi}$ où $\hat{\varphi}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-t^2} dt$

2) Continuité sur $\mathbb{R}$ de G où $G(a) = \int_0^\pi \sin(ax) dx$

3) Continuité sur $[0, +\infty[$ de F où $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$

Attention! Sans l'hypothèse de domination, les autres hypothèses ne suffisent pour obtenir la continuité

EXEMPLE 2 Étudier la continuité de $\left[F : x \mapsto \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt \right]$ sur $[0, +\infty[$. On pourra calculer explicitement $F(x)$

III) Dérivation

L'étude de la dérivabilité est l'étape logique qui suit l'étude de la continuité. Le plus souvent, l'idée est soit de déterminer explicitement $F(x)$ en obtenant une équation différentielle qu'on pourra résoudre, soit d'étudier les variations de F en étudiant le signe de sa dérivée.

Il arrive que le sujet « zappe » l'étude du domaine de définition et l'étude de la continuité pour demander directement de justifier la dérivabilité sur un intervalle J qu'il précise. Dans tous les cas, il s'agit d'utiliser le théorème suivant qu'on admet :

Théorème : Dérivation d'une intégrale à paramètre

Soit A et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et $[f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}]$,

la fonction $\left[F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt \right]$ est de classe C^1 sur l'intervalle A lorsque

- i. pour tout $x \in A$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est intégrable sur I
- ii. pour tout $t \in I$, la fonction $[x \mapsto f(x, t)]$ est de classe C^1 sur A
- iii. pour tout $x \in A$, la fonction $\left[t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right]$ est continue sur I
- iv. il existe une fonction φ intégrable sur I telle que : $\forall (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$
(hypothèse de domination)

De plus, on a alors : $\forall x \in A, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Remarques :

- On appelle parfois ce théorème « Théorème de Leibniz » mais, pour éviter toute confusion avec « la formule de Leibniz », je préfère, conformément au programme, qu'on utilise « théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre »

Formule de Leibniz :

- la continuité nécessaire pour i et les propositions ii. et iii. s'obtiennent à partir de « f est de classe C^1 sur $A \times I$ » (f étant une fonction de deux variables)

- Ce théorème est un théorème qui permet d'intervertir un symbole $\frac{d}{dx}$ avec un symbole $\int_I$. En effet :

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_I f(x, t) dt \right) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

- Il faut bien « comprendre l'utilité des hypothèses » :

- L'hypothèse i. assure la définition de F sur A
- Par le théorème de continuité, ii., iii. et iv. assure la définition et la continuité de $\left[x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right]$
- L'hypothèse de domination porte uniquement sur $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ et elle suffit à assurer la continuité de F sous réserve de la continuité de $[x \mapsto f(x, t)]$ assurée par ii (et sans domination de $f(x, t)$!)
- On obtient non seulement la dérivabilité de F sur I mais aussi que $F' = \left[x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \right]$ (d'où le caractère C^1 puisque cette application est continue)

- On rappelle que : $i. \Leftrightarrow$ pour tout $x \in A$, la fonction $[t \mapsto f(x, t)]$ est continue sur I et $\int_I |f(x, t)| dt$ est convergente

On remarquera que cela est vérifié sous les hypothèses i) et iii) du théorème de continuité.

- Comme la continuité, **la dérivabilité est une propriété locale** aussi, si la domination n'est pas possible sur la totalité de I , le sujet peut (doit) vous proposer d'utiliser une domination locale.
- Le programme ne propose plus de corollaire pour simplifier les hypothèses dans le cas où $I = [a, b]$

IV) Classe C^n où $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

Il n'y a pas de théorème directement au programme mais il suffit, bien souvent, d'itérer le théorème de dérivation quitte à mener un raisonnement par récurrence.

SUIVE EXEMPLE 1

IV. Étudier la dérivabilité de la fonction définie par l'intégrale à paramètre

sur $\mathbb{R}$ pour les cas 1. et 2. et sur $]0, +\infty[$ pour le cas 3. en dominant d'abord sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$

SUIVE EXEMPLE 1

V. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$. Déduire alors de ce qui précède la valeur de :

- la limite $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \int_0^\pi \sin(ax) dx$
- l'expression de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$ en fonction de x sans le symbole intégrale lorsqu'elle existe.
On pourra utiliser un changement de variables pour calculer $F'(x)$
- l'expression de $\hat{\varphi}(x)$ en fonction de x sans le symbole intégrale lorsqu'elle existe.
On pourra réaliser une intégration par parties pour trouver un problème de Cauchy vérifiée par $\hat{\varphi}$