

CHAPITRE XI: ISOMÉTRIES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

Dans tout le chapitre, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien de dimension n et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

I) Isométries vectorielles

I-1) Définition et caractérisation

Définition : Isométrie vectorielle d'un espace euclidien

Une isométrie vectorielle de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un endomorphisme de E qui conserve la norme :

$$f \text{ est une isométrie vectorielle de } E \Leftrightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{L}(E) \\ \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\| \end{cases}$$

Exemple : id_E et $-id_E$ sont des isométries de E

Proposition :

Une isométrie vectorielle de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un automorphisme

Théorème : Caractérisation des isométries vectorielles d'un espace euclidien

Dans l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, on a

$$\begin{aligned} f \text{ est une isométrie de } E &\Leftrightarrow f : E \rightarrow E \text{ conserve le produit scalaire : } \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \\ &\Leftrightarrow f \in \mathcal{L}(E) \text{ et l'image d'une base orthonormée de } E \text{ est} \\ &\text{encore une base orthonormée de } E \end{aligned}$$

1) $\Rightarrow$ 2) : On utilise une formule de polarisation :

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) = \frac{1}{2} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \text{ par linéarité} \\ &= \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \langle x, y \rangle \text{ par conservation de la norme} \end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 3) : Il s'agit de prouver :

Linéarité : Soient $(x, y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on montre que $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$ en montrant que :

$$\begin{aligned} \|f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y)\| &= 0 \Leftrightarrow \langle f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y), f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y) \rangle = 0 \\ \langle f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y), f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y) \rangle &= \langle f(\alpha x + y), f(\alpha x + y) \rangle + \alpha^2 \langle f(x), f(x) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle \\ &\quad - 2\alpha \langle f(\alpha x + y), f(x) \rangle - 2 \langle f(\alpha x + y), f(y) \rangle + 2\alpha \langle f(x), f(y) \rangle \\ &= \langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle + \alpha^2 \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\quad - 2\alpha \langle \alpha x + y, x \rangle - 2 \langle \alpha x + y, y \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle \\ &= \langle \alpha x + y - \alpha x - y, \alpha x + y - \alpha x - y \rangle = \|0_E\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Image d'une BON : On montre que, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une BON de E , alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une BON de E

$$\text{Or : } \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \text{ car } (e_1, \dots, e_n) \text{ BON donc } (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une BON}$$

3) $\Rightarrow$ 1) : Comme on sait déjà que f est un endomorphisme, il suffit de démontrer la conservation de la norme.

On choisit une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E (on sait que ça existe) et, pour tout vecteur x de E , on décompose x dans cette base : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ où $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$. Par linéarité : $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$. On dispose donc des coordonnées

de $f(x)$ dans la BON $(f(e_1), \dots, f(e_n))$. En utilisant le calcul de normes dans une BON, on a : $\|f(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|$

Remarque : La troisième caractérisation assure qu'une isométrie est forcément un automorphisme de E

I-2) Groupe orthogonal**Théorème et définition : Groupe orthogonal $O(E)$**

On appelle $O(E)$ l'ensemble des isométries de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- la composée de deux isométries est une isométrie : $\forall (f, g) \in O(E)^2, f \circ g \in O(E)$

On sait déjà que $f \circ g \in \mathcal{L}(E)$ et :

$$\forall x \in E, \|f \circ g(x)\| = \|f(g(x))\| = \|g(x)\| = \|x\| \text{ car } f \in O(E) \text{ et } g \in O(E)$$

- $id_E \in O(E)$ et la réciproque d'une isométrie est une isométrie : $\forall f \in O(E), f^{-1} \in O(E)$

$$\text{On sait déjà que } f^{-1} \in \mathcal{L}(E) \text{ et : } \forall x \in E, \|f^{-1}(x)\| = \|f(f^{-1}(x))\| = \|x\|$$

On appelle $O(E)$ le groupe orthogonal de E et on a $O(E) \subset GL(E)$

Attention! $O(E)$ n'est pas stable par combinaison linéaire car : $id_E - id_E = [x \mapsto 0] \notin O(E)$ si $n \geq 1$

Proposition : Sev stables par une isométrie

Soit $f \in O(E)$ une isométrie de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

si F est un sous-espace vectoriel stable par f alors $F^\perp$ est aussi stable par f

On suppose que F est stable par $f \in O(E)$ autrement dit : $\forall x \in F, f(x) \in F$

Prouvons que $F^\perp$ est stable par f : soit $y \in F^\perp$, on doit vérifier : $f(y) \in F^\perp \Leftrightarrow \forall x \in F, \langle x, f(y) \rangle = 0$.

Comme $f \in O(E)$, on sait qu'elle est bijective aussi : $\exists ! x' \in E, x = f(x')$. Alors : $\langle x, f(y) \rangle = \langle f(x'), f(y) \rangle = \langle x', y \rangle$ par conservation du produit scalaire. Comme $y \in F^\perp$, il suffit de prouver que $x' \in F$ pour terminer la preuve.

Or, F étant stable par f , la restriction de f à F est un endomorphisme de F et, comme f est bijective,

$\text{Ker } f = \{0_E\} \Rightarrow \text{Ker } (f|_F) = \text{Ker } f \cap F = \{0_E\}$ de sorte que c'est un endomorphisme injectif de F

Mais : $\begin{cases} f|_F \in \mathcal{L}(F) \\ \dim F < +\infty \\ f|_F \text{ est injective} \end{cases} \Rightarrow f|_F \text{ est un automorphisme de } F \text{ et donc } x \text{ admet un antécédent par } f \text{ dans } F \text{ et, par}$

unicité de cet antécédent dans E , c'est x' !

I-3) Exemple de référence : les symétries orthogonales**Définitions : Symétrie orthogonale et réflexion**

Dans l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a : $F \oplus F^\perp = E$

en effet : $\dim F < +\infty$ puisque $F \subset E$ et E euclidien

- une symétrie orthogonale est une symétrie vectorielle par rapport à un sev F de E et parallèlement à $F^\perp$

Si on appelle s la symétrie orthogonale par rapport au sev F de E , on rappelle que :

$$\forall x = x_F + x_{F^\perp} \in E = F \oplus F^\perp, s(x) = x_F - x_{F^\perp}$$

$$\text{et qu'on a : } F = \text{Ker } (s - id_E) \quad \text{et} \quad F^\perp = \text{Ker } (s + id_E)$$

- une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H de E

Proposition :

Les symétries orthogonales (et donc les réflexions) sont des isométries

$$\forall x = x_F + x_{F^\perp} \in E = F \oplus F^\perp, s(x) = x_F - x_{F^\perp}$$

Or, les vecteurs x_F et $x_{F^\perp}$ sont orthogonaux donc le théorème de Pythagore donne :

$$\|s(x)\|^2 = \|x_F\|^2 + \|-x_{F^\perp}\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_{F^\perp}\|^2 = \|x_F + x_{F^\perp}\|^2 = \|x\|^2$$

Aussi : $s \in \mathcal{L}(E)$ et conserve la norme donc c'est bien une isométrie.

II) Matrices orthogonales

II-1) Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée, matrice de passage entre des bases orthonormées

• Considérons un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ munit d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Étant donnée un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on s'intéresse à la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$:

Points de cours :

- coordonnées dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E alors $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$

- matrice M d'une application linéaire u dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$:

la j ème colonne de M correspond aux coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_j), e_i \rangle e_i \quad \text{donc : } M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u(e_1), e_1 \rangle & \dots & \langle u(e_j), e_1 \rangle & \dots & \langle u(e_n), e_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle u(e_1), e_n \rangle & \dots & \langle u(e_j), e_n \rangle & \dots & \langle u(e_n), e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Notons C_j la colonne j de la matrice M . Calculons le coefficient (i, j) de la matrice $M^T M$.

Points de cours :

- par définition de la transposée, les lignes de la matrices M^T sont les colonnes de M

- on obtient le coefficient (i, j) de $M^T \times M$ en réalisant le produit de la ligne i de M^T par la colonne j de M

- l'application $y \mapsto \langle u(e_i), y \rangle$ est linéaire donc $\left\langle u(e_i), \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle u(e_i), e_k \rangle$

Par définition, c'est le produit de la ligne i de M^T qui vaut C_i^T par la colonne j de M soit

$$[M^T M]_{ij} = C_i^T C_j = \sum_{k=1}^n \langle u(e_i), e_k \rangle \underbrace{\langle u(e_j), e_k \rangle}_{=\alpha_k \in \mathbb{R}} = \text{par bilinéarité} \left\langle u(e_i), \sum_{k=1}^n \langle u(e_j), e_k \rangle e_k \right\rangle = \langle u(e_i), u(e_j) \rangle \text{ (coordonnées dans une BON)}$$

• Considérons un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ munit de deux base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, comparons les coefficients (i, j) de P et P^{-1} .

On sait que $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$, or, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket : e'_j = \sum_{k=1}^n \langle e'_j, e_k \rangle e_k$ aussi : $[P]_{ij} = \langle e'_j, e_i \rangle$

De façon analogue : $P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n)$ donc : $[P^{-1}]_{ij} = \langle e_j, e'_i \rangle = \langle e'_i, e_j \rangle$

Ainsi : $[P^{-1}]_{ij} = P_{ji}$ de sorte que $P^{-1} = P^T$ et, par suite : $P^T P = I_n = P P^T$

II-2) Matrice orthogonale**Définition : Matrice orthogonale**

Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M^T M = I_n = M M^T$

On note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales qu'on appelle le groupe orthogonal

Caractérisation des matrices orthogonales

Soit une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$,

- M est une matrice orthogonale $\Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow M^T M = I_n$
 - $\Leftrightarrow M M^T = I_n$
 - $\Leftrightarrow M$ est inversible avec $M^{-1} = M^T$
 - $\Leftrightarrow$ les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$
 - $\Leftrightarrow$ les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$
 - $\Leftrightarrow M$ est une matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée

On note de 1 à 7 les propositions précédentes.

1) $\Rightarrow$ 2) par définition

2) $\Rightarrow$ 3) car : $M M^T = (M^T M)^T = I_n^T = I_n$

3) $\Rightarrow$ 4) d'après une caractérisation des matrices inversibles (si $AB = I_n$ alors A inversible et $A^{-1} = B$)

4) $\Rightarrow$ 1) car : $M^T M = M^{-1} M = I_n$ et $M M^T = M M^{-1} = I_n$

On a donc déjà l'équivalence des 4 premières propriétés.

Comme on a pu le voir précédemment, le coefficients (i, j) de la matrice $M^T M$ est $C_i^T C_j = \langle C_i, C_j \rangle$

De même, le coefficients (i, j) de la matrice $M M^T$ est $L_i L_j^T = \langle L_i, L_j \rangle$ où L_k est la ligne k de M .

Dés lors : 2) $\Leftrightarrow$ 5) et 3) $\Leftrightarrow$ 6) d'où l'équivalence des 6 premières propositions.

On a vu, dans les calculs matriciels précédent, que 7) $\Rightarrow$ 1). Mais : 1) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 7) puisque M devient la matrice de passage de la base canonique (orthonormée) à la base des colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ orthonormée. Ainsi : 1) $\Leftrightarrow$ 5) $\Leftrightarrow$ 7)

EXEMPLE N° 1 On considère la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & a \\ -1 & 2 & b \\ -2 & d & c \end{pmatrix}$ où (a, b, c, d) sont des réels.

Déterminer ces réels pour que A soit une matrice orthogonale.

II-3) Matrices orthogonales et isométries**Théorème : Caractérisation matricielle des isométries**

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$,
 u est une isométrie $\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale

$\Rightarrow$ On a vu précédemment que, si $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ alors $M^T M = \left(\langle u(e_i), u(e_j) \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq n}$. Si u est une isométrie, $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une BON et donc $M^T M = I_n$ et donc M orthogonale puisque $\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
 $\Leftarrow$ Si M est orthogonale, on montre : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ (car on a déjà $u \in \mathcal{L}(E)$)
 pour tout x dans E de coordonnées X dans $\mathcal{B}$ alors : $\langle f(x), f(x) \rangle = (MX)^T MX = X^T M^T MX = X^T X = \langle x, x \rangle$

Théorème : Caractérisation matricielle des symétries orthogonales

Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$,
 u est une symétrie orthogonale $\Leftrightarrow M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale et $M^2 = I_n$

$\Rightarrow$ On a déjà vu qu'une symétrie orthogonale est une isométrie donc M est une matrice orthogonale d'après le résultat précédent. On sait aussi que $u \circ u = id$ (puisque u est une symétrie) donc, matriciellement, $M^2 = I_n$
 $\Leftarrow$ Comme $M^2 = I_n$, on peut affirmer que $u \circ u = id$ et donc u est une symétrie vectorielle et on sait que $E = \text{Ker}(u - id) \oplus \text{Ker}(u + id)$. Pour obtenir que u est une symétrie orthogonale, on vérifie que ces sev sont orthogonaux : soit $x_1 \in \text{Ker}(u - id) \Leftrightarrow u(x_1) = x_1$ et $x_2 \in \text{Ker}(u + id) \Leftrightarrow u(x_2) = -x_2$, on vérifie $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$
 Or, u étant une isométrie, elle conserve le produit scalaire :
 $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle u(x_1), u(x_2) \rangle = \langle x_1, -x_2 \rangle = -\langle x_1, x_2 \rangle \Rightarrow 2\langle x_1, x_2 \rangle = 0 \Rightarrow x_1 \perp x_2$

Proposition : Déterminant d'une matrice orthogonale, déterminant d'une isométrie

- Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut 1 ou -1

$$1 = \det(I_n) = \det(M^T M) = \det(M^T) \det M = (\det M)^2$$

- Le déterminant d'une isométrie vaut 1 ou -1

Si u est une isométrie, $\det u = \det M$ où M est n'importe laquelle des matrices de u . Comme E est euclidien, on peut trouver une BON $\mathcal{B}$ de E et utiliser $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ qui est orthogonale donc $\det u = \det M = \pm 1$

Proposition : Spectre d'une matrice orthogonale, d'une isométrie

Les valeurs propres d'une isométrie (d'une matrice orthogonale) sont de module 1

Soit λ vp de $f \in O(E)$ associé au vecteur propre x alors : $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$

Mais : $\|f(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow \|\lambda x\| = \|x\| \Leftrightarrow |\lambda| \|x\| = \|x\| \Leftrightarrow |\lambda| = 1$ car $x \neq 0$ puisque c'est un vecteur propre

Définition : Isométrie vectorielle directe, groupe spécial orthogonal

- On dit qu'une isométrie vectorielle est directe lorsque son déterminant vaut 1.
On appelle $SO(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles directes.
- On appelle groupe spécial orthogonal l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1.
On le note $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$.
- On dit qu'une isométrie vectorielle est indirecte lorsque son déterminant vaut -1.

Attention! Changement de terminologie : on parle parfois d'isométries positives ou négatives (cf. ancien programme).

Proposition : Propriétés de $SO_n(\mathbb{R})$

- $SO_n(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$
- Si $A \in SO_n(\mathbb{R})$ et $B \in SO_n(\mathbb{R})$ alors $AB \in SO_n(\mathbb{R})$
- Si $A \in SO_n(\mathbb{R})$, $A^{-1} = A^T \in SO_n(\mathbb{R})$

Premier point évident. Second point : $\det(AB) = \det A \times \det B = 1 \times 1 = 1$. Troisième point : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$

- La composée de deux isométries vectorielles directes est directe.
La composée de deux isométries vectorielles indirectes est aussi indirecte.
- Orienter un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, c'est choisir une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ de référence.
Dés lors, si on considère une autre base orthonormée $\mathcal{B}$ de E , il a deux possibilités
 - soit $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} \in SO_n(\mathbb{R})$ (lorsque $\det P = 1$) et on dit que $\mathcal{B}$ est une base directe
 - soit $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} \in O_n(\mathbb{R}) - SO_n(\mathbb{R})$ (lorsque $\det P = -1$) et on dit que $\mathcal{B}$ est une base indirecte.

III) Isométries de l'espace euclidiens de dimension 2 et 3

III-1) Orientation du plan et de l'espace usuels

Proposition : orientation d'un espace euclidien, base directe et indirecte

On dit qu'on oriente un espace euclidien E en choisissant une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ de référence de E .
On sait déjà que, pour tout autre base $\mathcal{B}$ orthonormée de E , la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}$ est orthogonale.
On dira que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe lorsque la matrice de passage $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} \in SO_n(E)$ (càd $\det P = 1$)
Elle sera indirecte dans le cas contraire.

Par convention :

- les bases directes du plan sont celles respectant le sens trigonométrique en général.
- les bases directes de l'espace sont celles qui respectent la règle des trois doigts de la main droite.

Dans un espace de dimension 3 :

- on oriente une droite D en choisissant un vecteur directeur unitaire $\vec{e}_1$ de cette droite. De fait, cela induit une orientation du plan $D^\perp$: une base orthonormée $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est directe dans $D^\perp$ lorsque la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est directe.
- on orientera un plan P en choisissant une orientation de la droite $P^\perp$

Corollaire : Caractérisation des matrices de $O_2(\mathbb{R}), SO_2(\mathbb{R}), O_3(\mathbb{R}), SO_3(\mathbb{R})$

Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ ($n \in \{2, 3\}$), on note C_i la colonne i de M . On note $X.Y$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$

$$M \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow C_1.C_2 = 0, \quad C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2$$

$$M \in SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow C_1.C_2 = 0, \quad C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2 \quad \text{et} \quad \det(M) = 1$$

$$M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow C_1.C_2 = 0, \quad C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2 \quad \text{et} \quad C_3 = \pm C_1 \wedge C_2$$

$$M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow C_1.C_2 = 0, \quad C_1.C_1 = 1 = C_2.C_2 \quad \text{et} \quad C_3 = C_1 \wedge C_2$$

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée directe et M est une matrice de passage de la base canonique vers la base formée par les colonnes de M . Remarque : $M \in SO_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T \in SO_3(\mathbb{R})$ et ce qui est vraie pour les colonnes l'est aussi pour les lignes

III-2) Description des isométries vectorielles planes

L'objectif de cette partie est de décrire toute les isométries de $O(\mathbb{R}^2)$ et de préciser celle de $SO(\mathbb{R}^2)$.

On considère f une isométrie de $\mathbb{R}^2$ et sa matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}$

(Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}^2$ mais pas forcément...)

$$M^T M = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \phi \\ \sin \theta & \sin \phi \end{pmatrix} \text{ et } \cos(\theta - \phi) = 0$$

On utilise ici un LEMME de PTSI : si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\alpha = \cos \theta$ et $\beta = \sin \theta$

Preuve : $|\alpha| = \sqrt{\alpha^2} \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$ donc $\alpha \in [-1, 1]$ et, de manière analogue : $\beta \in [-1, 1]$

Si $\beta \geq 0$, on pose $\theta = \text{Arccos}(\alpha)$ alors, par définition de Arccos : $\cos \theta = \alpha$ et $\theta \in [0, \pi] \Rightarrow \sin \theta \geq 0$ donc $\sin \theta = |\sin \theta| = \sqrt{\sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \alpha^2} = \sqrt{\beta^2} = \beta$

Si $\beta < 0$, on pose $\theta = -\text{Arccos}(\alpha)$. On a toujours : $\cos \theta = \cos(-\theta) = \cos(\text{Arccos} \alpha) = \alpha$ mais, cette fois : $\theta \in [-\pi, 0] \Rightarrow \sin \theta < 0$ et $\beta < 0$ donc $-\sin \theta = |\sin \theta| = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \alpha^2} = \sqrt{\beta^2} = |\beta| = -\beta \Rightarrow \sin \theta = \beta$

On résout alors : $\cos(\theta - \phi) = 0 \Leftrightarrow \theta - \phi \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \phi = \theta - \frac{\pi}{2} + k\pi$ de sorte que :

$$\cos \phi = (-1)^k \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \sin \theta \text{ et } \sin \phi = (-1)^k \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^k \cos \theta \text{ d'où } M = \begin{pmatrix} \cos \theta & (-1)^k \sin \theta \\ \sin \theta & -(-1)^k \cos \theta \end{pmatrix}$$

de sorte que : $\det M = -(-1)^k \cos^2 \theta - (-1)^k \sin^2 \theta = (-1)^{k+1}$ aussi $M \in \text{SO}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow k+1$ pair $\Leftrightarrow k$ impair

On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème : Description de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$

$$\bullet M \in O_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \mp \sin \theta \\ \sin \theta & \pm \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\bullet M \in SO_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Description géométrique

Or, nous avons déjà rencontré ce type de matrice en PTSI. En effet, le plan $\mathbb{R}^2$ peut être assimilé au plan complexe.

• Considérons un vecteur u de $\mathbb{R}^2$ d'affixe $z = x + iy$, son image par la rotation r vectorielle (donc de centre O) d'angle θ est le vecteur $r(u)$ d'affixe $e^{i\theta} z = (\cos \theta + i \sin \theta)(x + iy) = ((\cos \theta)x - (\sin \theta)y) + i((\sin \theta)x + (\cos \theta)y)$

En terme de coordonnées, on peut exprimer les coordonnées de $r(u)$ à l'aide de celle de u :

$$\begin{pmatrix} (\cos \theta)x - (\sin \theta)y \\ (\sin \theta)x + (\cos \theta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Une matrice du type $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est donc la matrice d'une rotation vectorielle d'angle θ

Précisons le spectre : $\chi_{R(\theta)} = (x - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = (x - \cos \theta)^2 - i^2 \sin^2 \theta = (x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})$

Il n'y a pas de valeur propres réelles sauf si $\theta \equiv 0 [\pi]$ ie $f = \pm id$.

L'espace $E_1 = \text{Ker}(f - id)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par la transformation f .

Si $f = id$, $E_1 = \mathbb{R}^2$. Si $f = -id$, $E_1 = \{0_E\}$ (pas de vecteur invariant par retournement) mais $E_{-1} = \text{Ker}(f + id) = \mathbb{R}^2$

Si f est la rotation d'angle $\theta \not\equiv 0 [\pi]$, alors $E_1 = E_{-1} = \{0_E\}$ (pas de vecteur invariant lors d'une rotation)

• Pour $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, on vérifie (à faire) $S(\theta)^2 = I_2$ et $S(\theta) \in O_2(\mathbb{R})$ donc $S(\theta)$ est une symétrie orthogonale.

En outre : $\chi_{S(\theta)} = (x - \cos \theta)(x + \cos \theta) - \sin^2 \theta = x^2 - 1$

$\chi_{S(\theta)}$ est donc toujours scindé à racines simples d'où $\text{Sp}(f) = \{-1, +1\}$ et les deux sev propres sont de dimension 1

Les sev propre $E_1 = \text{Ker}(f - id)$ (ensemble des vecteurs invariants) est de dimension 1 : c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^2$

Finalement, $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice d'une réflexion.

On peut préciser la droite E_1 en explicitant ce sev propre :

$$(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (x, y) \in \text{Ker}(S(\theta) - I_2) = \text{Ker} \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{(\cos \theta - 1)x}_{-2\sin^2 \frac{\theta}{2}} + \underbrace{(\sin \theta)y}_{2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = 0$$

On reconnaît une équation de droite dans le plan du type $ax + by + c = 0$ (avec $c = 0$ puisque c'est une droite vectorielle!)

qui est dirigée par le vecteur $-2\sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ ie $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ colinéaire au vecteur $\cos \frac{\theta}{2} e_1 + \sin \frac{\theta}{2} e_2$ avec (e_1, e_2) la base canonique du plan.

L'autre équation est bien proportionnelle $\underbrace{\sin \theta}_{2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} x - \underbrace{(\cos \theta + 1)}_{2\cos^2 \frac{\theta}{2}} y = 0$ est l'équation de la droite dirigée par le vecteur $2\cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

Corollaire : Description des isométries planes

- Les isométries planes directes sont les rotations planes d'angle θ . Dans une base orthonormée quelconque, la matrice de l'isométrie est la matrice de rotation $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.
et on a : $R(\theta)R(\phi) = R(\theta + \phi) = R(\phi)R(\theta)$ et $R^T(\theta) = R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$
 - Les isométries planes indirectes sont des réflexions (symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan donc ici une droite). Dans une base orthonormée, la matrice de l'isométrie est $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.
- Remarque : L'isométrie est la réflexion par rapport à $\text{Ker}(f - id) = \text{Vect}\left(\cos \frac{\theta}{2} e_1 + \sin \frac{\theta}{2} e_2\right)$

Nature géométrique	det	spectre	sev propre	Matrice dans toute BON
$f = id$ (rotation d'angle $\theta \equiv 0[2\pi]$)	1	{1}	$E_1 = \mathbb{R}^2$	I_2
$f = -id$ (retournement ou rotation d'angle $\theta \equiv \pi[2\pi]$)	1	{-1}	$E_{-1} = \mathbb{R}^2$	$-I_2$
Rotation d'angle $\theta \not\equiv 0[\pi]$	1	$\emptyset$		$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
Réflexion d'axe $\text{Vect}(\vec{u})$	-1	{-1, 1}	$\begin{cases} E_1 = \text{Vect}(\vec{u}) \\ E_{-1} = E_1^\perp \end{cases}$	$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$

Méthode : Reconnaître une isométrie du plan

- Étant donné une isométrie f de $\mathbb{R}^2$,
- on détermine sa matrice M dans une base orthonormée quelconque de $\mathbb{R}^2$
 - si $\det f = \det M = 1$ alors c'est une rotation (éventuellement l'identité ou un retournement)
On peut préciser l'angle θ de la rotation en identifiant $M = R(\theta)$
 - si $\det f = \det M = -1$ alors c'est une réflexion d'axe $D = E_1(f) = \text{Ker}(f - id)$ ($D^\perp = E_{-1} = \text{Ker}(f + id)$)

III-3) Description des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$

L'objectif de cette partie est de décrire toutes les isométries de $O(\mathbb{R}^3)$ et de préciser celle de $SO(\mathbb{R}^3)$.
On sait que χ_f est un polynôme unitaire de degré 3 à coefficients réels : il admet donc forcément une racine réelle.
[$t \mapsto \chi_f(t)$] est C^0 sur $\mathbb{R}$ car polynomiale avec des limites en $+\infty$ et $-\infty$ opposées puisque $\chi_f(t) \sim_{\pm\infty} t^3$
Le théorème des valeurs intermédiaires assurent que $\chi_f(\mathbb{R})$ est un intervalle qui doit aller de $-\infty$ à $+\infty$
Ainsi, $\chi_f(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[$ aussi $0 \in \chi_f(\mathbb{R})$ et donc $\exists t_0 \in \mathbb{R}, \chi_f(t_0) = 0$ autrement dit χ_f possède une racine réelle.

Cette racine est forcément 1 ou -1 : si on la note λ et x le vecteur propre : $\|f(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow |\lambda| \|x\| = \|x\| \Leftrightarrow |\lambda| = 1$
Comme χ_f est un polynôme à coefficients réels, les deux autres racines de χ_f sont :
soit deux réels de $\{-1, 1\}$ donnant comme ensemble de racines $\{1, 1, 1\}, \{1, 1, -1\}, \{1, -1, -1\}$ ou $\{-1, -1, -1\}$
soit deux complexes conjugués $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ donnant comme ensemble de racines $\{1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$ ou $\{-1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$

- Si f est une isométrie directe (ie $f \in SO(\mathbb{R}^3)$) : 1 est forcément une valeur propre

On doit avoir $\det f = 1$ donc
si toutes les vp sont réelles seul les cas $\{1, 1, 1\}$ et $\{1, -1, -1\}$ sont possibles
si il y a deux vp complexes et une vp propre réelle λ : $1 = \det(f) = \lambda e^{-i\theta} e^{i\theta} = \lambda$ d'où $\lambda = 1$

On peut trouver une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ avec $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$

On choisit u unitaire associé à la valeur propre 1 et on note $D = \text{Vect}(u)$. On sait que : $D \oplus D^\perp = \mathbb{R}^3$

D est stable par l'isométrie f car $\forall x \in D, \exists \alpha \in \mathbb{R}, x = \alpha u$ et $f(x) = \alpha f(u) = \alpha u \in D$

On sait donc que $D^\perp$ est aussi stable par l'isométrie f (voir propriétés des sev stable par une isométrie)

La matrice aura la forme voulue dans une base adaptée à $D \oplus D^\perp = \mathbb{R}^3$

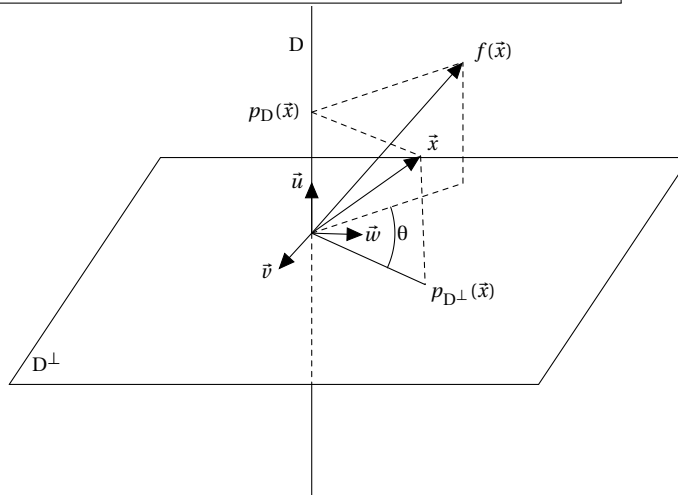
et, de façon plus précise :

il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ et un réel θ avec $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Par bloc : $M^T M = I_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$ et $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ d'où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ Or, la forme des matrices orthogonales positives est celle d'une matrice de rotation (voir caractérisation des isométries planes)

Pour construire la base orthonormée (u, v, w) , il suffit de choisir v unitaire dans $D^\perp$ et de prendre $w = u \wedge v$ de sorte que (u, v, w) est bien une BOND adaptée à $D \oplus D^\perp = \mathbb{R}^3$

autrement dit : f est une rotation vectorielle d'angle θ et d'axe $D = \text{Vect}(u)$



avec les cas particuliers où $f = id$ si $\theta \equiv 0[2\pi]$ et f est un retournement ou demi-tour si $\theta \equiv \pi[2\pi]$

On remarque que : $\text{tr}(f) = 2 \cos \theta + 1$

La trace de f se calcule dans n'importe laquelle de ses matrices

De plus, si $v \in D^\perp$ avec $\|v\| = 1$:

$$v \cdot f(v) = \cos \theta \quad \text{car } u \cdot f(v) = \|v\| \|f(v)\| \cos \theta = \cos \theta$$

$$\det(u, v, f(v)) = \sin(\theta)$$

$$\text{car } \det(u, v, f(v)) = (u \wedge v) \cdot f(v) = w \cdot (\cos \theta v + \sin \theta w) = 0 + \sin \theta \|w\|^2 = \sin \theta$$

$$v \wedge f(v) = (\sin \theta) u \quad v \wedge ((\cos \theta) v + (\sin \theta) w) = \vec{0} + (\sin \theta) v \wedge w = (\sin \theta) u$$

Exercice classique : Expression vectorielle d'une rotation

On considère une rotation vectorielle r d'axe $D = \text{Vect}(u)$ où u est unitaire et d'angle θ .

Démontrer que, pour tout vecteur x de E : $r(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)u \wedge x + (1 - \cos \theta)(x \cdot u)u$

- Si f est une isométrie indirecte : -1 est forcément une valeur propre raisonnement analogue avec $\det f = -1$

il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ et un réel θ avec $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

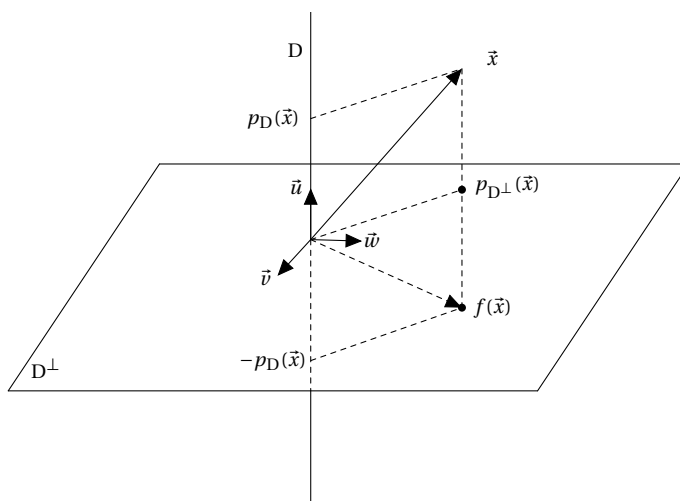
on choisit u unitaire associé à la valeur propre -1 et on note $D = \text{Vect}(u)$. On a : $D \oplus D^\perp = \mathbb{R}^3$

Dans une BON adaptée à cette décomposition : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ avec $A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ car $\det M = -\det A = -1$

$$\text{or : } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

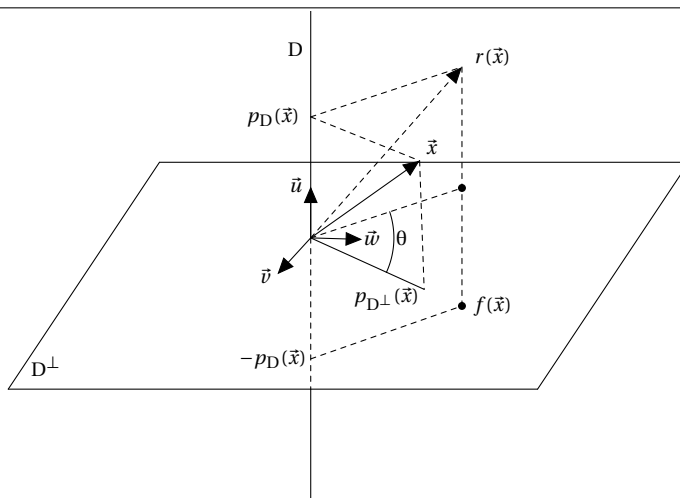
La matrice $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une réflexion par rapport au plan $D^\perp$ où $D = \text{Vect}(u)$.

aussi f est la réflexion par rapport à $D^\perp$ où $D = \text{Vect}(u)$ lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$



Plus généralement :

f est la composé d'une réflexion par rapport au plan $D^\perp = \text{Vect}(u)^\perp$ et d'une rotation d'angle θ d'axe D



avec les cas particuliers où $f = -id$ si $\theta \equiv \pi[2\pi]$

et f est la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \text{Vect}(u)^\perp$ si $\theta \equiv 0[2\pi]$

On a : $\text{tr}(f) = -1 + 2 \cos \theta$ calcul de la trace dans n'importe quelle matrice

. De plus, si $v \in D^\perp$ avec $\|v\| = 1$: $v \wedge f(v) = (\sin \theta) u$ $v \wedge ((\cos \theta) v + (\sin \theta) w) = \vec{0} + (\sin \theta) v \wedge w = (\sin \theta) u$

Proposition : Description des isométries de $\mathbb{R}^3$

Nature géométrique	det	spectre	sev propre	Matrice dans une certaine BOND
id	1	$\{1\}$	$E_1 = \mathbb{R}^3$	I_3
f est un demi-tour	1	$\{-1, 1\}$	$\begin{cases} \dim E_1 = 1 \\ E_{-1} = E_1^\perp \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Rotation d'angle $\theta \neq 0[\pi]$ d'axe D	1	$\{1\}$	$\dim E_1 = 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
$-id$	-1	$\{-1\}$	$E_{-1} = \mathbb{R}^3$	$-I_3$
Réflexion	-1	$\{-1, 1\}$	$\begin{cases} \dim E_1 = 1 \\ \dim E_{-1} = 2 \\ E_{-1} = E_1^\perp \end{cases}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Composée rotation/réflexion	-1	$\{-1\}$	$\dim E_{-1} = 1$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Méthode : Reconnaître une isométrie de $\mathbb{R}^3$

Soit $f \neq \pm id$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A dans une base orthonormée (éventuellement canonique)

- on vérifie que $A \in O_3(\mathbb{R})$ éventuellement $SO_3(\mathbb{R})$ sur les colonnes de A
(la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée directe)
- Si $A \in SO_3(\mathbb{R})$, c'est une rotation (éventuellement un demi-tour).

On précise l'axe de la rotation : $D = E_1 = \text{Ker}(f - id) = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(u)$ ($f \neq id$)

On précise l'angle de la rotation θ en déterminant $\cos \theta$ et le signe de $\sin \theta$ qu'on obtient

pour $\cos \theta$ avec : $\text{tr}(f) = \text{tr}(A) = 2 \cos \theta + 1$ ou bien $\cos \theta = v \cdot f(v)$ où $v \in D^\perp$ est unitaire

pour $\sin \theta$ avec : $\sin \theta = \det(u, v, f(v))$ où $\|u\| = \|v\| = 1$ et $v \in D^\perp$

ou bien : en comparant une coordonnée de $v \wedge f(v)$ et de u puisque : $v \wedge f(v) = \sin(\theta)u$

La suite n'est pas explicitement au programme sauf dans le cas d'une réflexion

- Si $A \in O_3(\mathbb{R}) - SO_3(\mathbb{R})$, c'est la composée d'une rotation et d'une réflexion (éventuellement la rotation est id)

On précise l'axe de la rotation, c'est $D = E_{-1} = \text{Ker}(f + id) = \text{Ker}(A + I_3)$.

La réflexion est celle par rapport à $D^\perp$.

On précise l'angle de la rotation en déterminant $\cos \theta$ et le signe de $\sin \theta$ qu'on obtient

pour $\cos \theta$ avec : $\text{tr}(f) = \text{tr}(A) = -1 + 2 \cos \theta$ ou bien $\cos \theta = v \cdot f(v)$ où $v \in D^\perp$ est unitaire

pour $\sin \theta$ avec : $\sin \theta = \det(u, v, f(v))$ où $\|u\| = \|v\| = 1$ et $v \in D^\perp$

ou bien : en comparant une coordonnée de $v \wedge f(v)$ et de u puisque : $v \wedge f(v) = \sin(\theta)u$

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$ alors f est la réflexion par rapport à $D^\perp$.

SUITE EXEMPLE N° 1 Décrire géométriquement l'isométrie f qui est alors canoniquement associée à A

EXEMPLE N° 2 On note $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la réflexion par rapport au plan F d'équation: $x - 2y - z = 0$
2. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la rotation d'axe orienté par $\vec{i} - \vec{j}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

SUITE EXEMPLE N° 2 Proposer une autre méthode pour répondre à la question 2) de l'exemple précédent

IV) Matrice symétrique réelle

Définition et propositions : Matrice symétrique/antisymétrique réelle

- Une matrice carrée A d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) est symétrique lorsque $A^T = A$. L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients réelles noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.
 - Une matrice carrée A d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) est antisymétrique lorsque $A^T = -A$. L'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients réelles noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
 - $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux de $M_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire usuel $\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^T N)$.
 - $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \quad M = \underbrace{\frac{M + M^T}{2}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{M - M^T}{2}}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})} \in M_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
- de sorte que $\left[p : M \mapsto \frac{M + M^T}{2} \right]$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Proposition : Orthogonalité des sev propres d'une matrice symétrique réelle

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux

Théorème : Théorème spectral de réduction des matrices symétriques réelles

(ADMIS)

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $M_n(\mathbb{R})$ avec une matrice de passage orthogonale
autrement dit : $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists P \in O_n(\mathbb{R}), D = P^{-1}AP = P^TAP$ est diagonale et réelle

On dit que A est **orthogonalement diagonalisable**

Remarque : on peut aussi dire que

Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ avec une base orthonormée de vecteurs propres.

Attention! Il s'agit d'un théorème pour les **matrices réelles!**

Construction d'un contre-exemple dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{C})$:

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice symétrique d'ordre 2 à coefficients complexes soit non diagonalisable. Préciser alors un exemple concret de matrice symétrique complexe non diagonalisable.

EXEMPLE N° 3

Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} P$ soit diagonale et réelle.