

CHAPITRE 0: RÉVISIONS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans tout le chapitre E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Espace vectoriel (généralités)

Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ alors

- les éléments x de E sont appelés et les éléments λ de $\mathbb{K}$ sont appelés
- il y a une loi interne $+$ qui est commutative :
et associative :
- il y a une multiplication externe à opérateur dans $\mathbb{K}$:
- une combinaison linéaire de vecteurs de E est un vecteur
- E contient au moins un vecteur appelé vecteur nul, noté 0_E ou simplement 0 qui vérifie :
Tous les vecteurs de E ont un opposé : l'opposé de x dans E est et il vérifie
- On dispose, par définition, de relations de calcul entre les deux lois : $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$
1) , 2) , 3) et 4)
- On démontre alors la règle de calcul très utile : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x = 0_E \Leftrightarrow$
- une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si :

Toute combinaison linéaire de vecteurs de F est encore un vecteur de F (stabilité par combinaison linéaire)

II) Famille de vecteurs (généralités)

Une famille $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est

- une famille génératrice de E si « tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille » :
- une famille libre dans E (ou encore que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont linéairement indépendants) si
« toute combinaison linéaire nulle des vecteurs de la famille est forcément triviale » :
- une base de E si

Remarque : Une famille (u, v) de deux vecteurs est libre lorsque
mais une famille de trois vecteurs peut être liée même si les vecteurs sont deux à deux non colinéaires.

Contre-ex : Dans $\mathbb{R}^3$, $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$

Attention au SENS de ce que vous écrivez! Commentez les corrections suivante
« La famille est clairement libre car les 3 vecteurs sont non colinéaire » PAS DE SENS ICI!

« Des vecteurs non coplanaires forment une famille libre. » IMPRECIS! COMBIEN DE VECTEURS?

Un résultat à connaître : Dans $\mathbb{K}[X]$, une famille de polynômes à degrés distincts est libre.

III) Espace vectoriel de dimension finie et bases

E est un espace vectoriel de dimension finie si

Dans ce cas, on peut toujours construire une base de E (théorème d'existence des bases en dimension finie)

- soit par le théorème de la base extraite :
- soit par le théorème de la base incomplète :

De plus, toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs qu'on appelle la dimension de E.

A retenir! Pour vérifier qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base de E, on peut vérifier :

- i) c'est une famille de vecteurs de E
 - ii) c'est une famille libre
 - iii) c'est une famille génératrice de E
- Avec i), on a déjà l'inclusion $\text{Vect}(\mathcal{F}) \subset E$

Lorsqu'on sait qu'on connaît la dimension de E, on dispose des équivalences suivantes

une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E est une base de E $\Leftrightarrow$

Pour vérifier que $\mathcal{F}$ est une base de E, on vérifie alors, en général : i), ii) et iv) $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim E$.

Espaces vectoriels de référence de dimension finie

Espaces E	0_E	$\dim E =$	base canonique
$\mathbb{R}^n$			
$\mathbb{C}^n$			
$M_n(\mathbb{K})$			
$\mathbb{K}_n[X]$			

Espaces qui ne sont pas de dimension finie (Par l'absurde en exhibant une famille libre de cardinal aussi grand que voulu)

$\mathbb{K}[X]$
 $\mathbb{K}^I$ où I est un ensemble quelconque
et, en particuliers $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Méthode : Démontrer qu'un espace est un espace vectoriel et préciser éventuellement la dimension

Pour démontrer qu'un espace F donné est un espace vectoriel, on vérifie, en général, que c'est un sev d'un espace de référence. On peut, pour cela :

- soit revenir à la définition en montrant que c'est un sev de l'espace E de référence à identifier
- soit vérifier que c'est un sev engendré dans l'espace E de référence à identifier

Si on demande, en plus, de préciser la dimension de cet espace F, alors la vérification par retour à la définition n'est pas utile car il faudra de toute façon rechercher une famille génératrice pour préciser une base.

En pratique, l'espace F sera introduit dans le sujet

- soit à l'aide de paramètres décrivant directement les vecteurs de F et qui conduit naturellement à la structure de sev engendré
- soit à l'aide d'une (ou plusieurs) équation(s) caractérisant l'appartenance d'un vecteur à F

EXEMPLE N° 1 Dans chaque cas, prouver que F est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

- a) $F = \{(s, t + s, 2t - s) \mid (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$ b) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + 2z - t = x + y + z = 0\}$
 c) $F = \{((\alpha + \gamma)X^2 + (\alpha + \beta)X + \beta - \gamma) \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3\}$ d) $F = \left\{ \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ P(1) & P'(1) \end{pmatrix} \mid P \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$
 e) F contient les polynômes réels de degrés au plus 3 vérifiant $P(1) = P(-1)$ et $P(0) = P^{(2)}(0) = 0$
 f) F est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$
 g) F est l'ensemble des suites réelles vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

IV) Coordonnées, changement de bases

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base du $\mathbb{K}\text{ev } E$ alors

on définit la colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ des coordonnées du vecteur x de sorte que

Si $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une autre base du $\mathbb{K}\text{ev } E$ alors

on trouvera une autre colonne $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ de coordonnées du vecteur x de sorte que

En changeant de bases, les coordonnées ont changées mais le vecteur x lui reste le même!

Exemples : Le vecteur $x = (3, 2)$ dans $\mathcal{B} = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$ a pour coordonnées $X =$
 mais dans $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2) = ((1, 1), (1, 0))$ la colonne de coordonnées est $X' =$

Dans le sev $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ rapporté à la base $\mathcal{B} = ([x \mapsto 1], [x \mapsto \cos^2 x])$, les coordonnées de $f = [x \mapsto \sin^2 x]$
 sont $X_f =$ et celles de $g = [x \mapsto \cos(2x)]$ sont $X_g =$

Attention! Un vecteur n'est pas égale à ses coordonnées (en général, x et X ne sont pas de la même nature...)

sauf dans le cas très particulier des coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{K}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$

D'une manière générale, les coordonnées dans les bases canoniques sont en général simple. Par exemple, il s'agit
 pour une matrice M de $M_{np}(\mathbb{K})$ de pour un polynôme P de $\mathbb{K}^n[X]$ de

Lorsqu'on dispose de deux bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ pour un même espace vectoriel E ,
 on peut relier les coordonnées X et X' à l'aide des matrices de passages selon la relation

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$

autrement dit la colonne j de la matrice de passage correspond

Par construction : la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^{-1} =$

Exemples : Dans $\mathbb{R}^2$ rapporté aux bases $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, 0))$

$P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} =$ et $P^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} =$

Pour $x = (3, 2)$, on a vérifie : $X = PX'$ puisque

EXEMPLE N° 2 Dans $\mathbb{R}[X]$, on définit $e_1 = (1 - X)^3$, $e_2 = (1 - X)^2$, $e_3 = 1 - X$ et $e_4 = 1$

1. Prouver que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$. Quel espace connu E engendre-t-elle ?
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E . Donner les matrices de passage entre les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
3. En déduire une primitive de $\left[f : x \mapsto (x^3 + x^2)\sqrt{1 - x} \right]$ sur $] -\infty, 1[$

V) Formule de Grassmann et sev supplémentaires

- Si F est un sev d'un espace vectoriel E de dimension finie alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$
- Si F et G sont deux sev d'un espace vectoriel E de dimension finie alors :

$$F \perp G \Leftrightarrow$$

- Si F et G sont des sev d'un espace vectoriel E de dimension finie alors : $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$
- Si F et G sont deux sev d'un espace vectoriel E quelconque, on dit que F et G sont supplémentaires noté $F \oplus G = E$ lorsque

et on a :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$

- Dans l'espace vectoriel E de dimension finie, si F et G sont les sev définies par les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$
 - la famille $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de $F + G$
 - $F \cap G = \{0_E\} \Leftrightarrow$ la famille $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E
 - si F et G sont supplémentaires, la famille $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E

Méthode : Comment construire un supplémentaire? En vertu du théorème de la base incomplète, on construit un supplémentaire de F dans E en

EXEMPLE N° 3 Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+b & b+c & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

et G l'ensemble des matrices de $M_{2,3}(\mathbb{R})$ dont la somme des coefficients de chacune des lignes est nulle.

1. Prouver que F et G sont des sev de $E = M_{2,3}(\mathbb{R})$
2. Déterminer une base de F et une base de G
3. Déterminer $\dim(F \cap G)$ et $\dim(F + G)$.
4. En déduire que $F + G = E$. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?
5. Donner deux supplémentaires de $F \cap G$ dans E .

VI) Application linéaire (généralité)

- Étant donné deux espaces vectoriels E et F sur le même corps $\mathbb{K}$ et soit une application $f : E \rightarrow F$,
 f est linéaire lorsque et on note alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que f est un endomorphisme et on note simplement $f \in \mathcal{L}(E)$ lorsque

$\mathcal{L}(E, F)$ est aussi un espace vectoriel sur le même corps $\mathbb{K}$.

Si E, F et G sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ alors : $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G)$,

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on lui associe les sev

$\text{Ker } f$ qui est un sev de E définit par : $\text{Ker } f =$

$\text{Im } f$ qui est un sev de F définit par : $\text{Im } f =$ =

Si E est un espace de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ alors

$\text{Im } f =$

On a : f est injective (càd) $\Leftrightarrow$

f est surjective (càd) $\Leftrightarrow$

On dit que f est un isomorphisme lorsque

On dit que f est un automorphisme lorsque

- Théorème du rang :

Le rang de f , lorsqu'il existe, est noté $\text{rg } f$ et vaut : .

- Corollaire : Si $n = \dim E = \dim F < +\infty$ alors

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective} \Leftrightarrow \dim \text{Ker } f = 0 \Leftrightarrow \text{rg } f = n$$

EXEMPLE N° 4 Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et f est un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = id_E$

1. Prouver que $\text{Im } (f - id_E) \subset \text{Ker } (f^2 + f + id_E)$
2. Montrer que le noyau et l'image de $f - id_E$ sont supplémentaires dans E

VII) Matrice d'une application linéaire

Étant donné deux espaces vectoriels E et F sur le même corps $\mathbb{K}$ de dimensions finies respectives n et p , une application linéaire f de $\mathcal{L}(E, F)$ est totalement caractérisée par l'image d'une base $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E . Si on connaît les vecteurs $(f(e_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ alors :

$$\forall x \in E, f(x) =$$

Si on connaît une base $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_p)$ de F , pour caractériser les vecteurs $(f(e_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, il suffit de connaître les coordonnées ainsi on peut totalement définir f via sa matrice relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) =$$

qui est dans

La colonne j de la matrice donne les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de x dans $\mathcal{B}_E$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f)$ alors les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{B}_F$ sont $Y =$
--

Dans le cas d'un endomorphisme, la matrice est carrée et on note simplement $\text{Mat}_B(f)$ si on utilise la même base pour les coordonnées de x et de $f(x)$.

L'application $\left[f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \right]$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ vers $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de sorte que

- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(\alpha f + g) =$

- $\dim \mathcal{L}(E, F) =$

et, en particulier, $\dim \mathcal{L}(E) =$

Si E, F et G sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ et de dimensions finies rapportées à des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(g \circ f) =$ Attention à la cohérence des tailles des matrices!

On parle de matrice canoniquement associée à une application linéaire ou d'application linéaire canoniquement associée à une matrice lorsque les bases de E et de F sont les bases canoniques.

On définit alors les notions de noyau, d'image, de rang pour une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ comme le noyau, le rang et l'image de l'application linéaire de qui lui est canoniquement associée de sorte que

$\text{Ker } A$ est un sev de et $\text{Im } A$ est un sev de

Le rang de A vu comme $\text{rg}(A) = \dim \text{Im } A$

Méthode : Noyau/Image d'une application linéaire à l'aide de sa matrice

Lorsque E et F sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$ de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on détermine $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ en utilisant la matrice A de f dans des bases quelconques $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ via $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.

Attention! En général, $\text{Ker } f \neq \text{Ker } A$ et $\text{Im } f \neq \text{Im } A$ mais les vecteurs d'une base de $\text{Ker } A$ (resp $\text{Im } A$) donnent les coordonnées dans $\mathcal{B}_E$ (resp $\mathcal{B}_F$) des vecteurs d'une base de $\text{Ker } f$ (resp $\text{Im } f$).

- Les colonnes de A forment une famille génératrice de $\text{Im } A$ aussi on peut souvent trouver "facilement" une base de $\text{Im } A$ et calculer $\text{rg}(A)$ en observant les relations sur les colonnes de A . Le théorème du rang permet alors d'obtenir $\dim \text{Ker } A$ et les relations observées sur les colonnes permettent de trouver ensuite une base de $\text{Ker } A$.
- si on ne trouve pas facilement le rang alors on commence par déterminer le noyau de A qui est l'ensemble des solutions du système $AX = 0$. Le théorème du rang donne alors le rang de A et il reste à choisir une famille libre de taille $\text{rg}(A)$ parmi les colonnes de A (qui sont tous des vecteurs de $\text{Im } A$)

EXEMPLE N° 5 Donner le noyau et l'image des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et des produits de ces matrices.

EXEMPLE N° 6 On considère les applications f et g données par:

1. $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}_2[X])$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a. Préciser $f(I_2)$ où I_2 est la matrice identité.

b. Préciser le noyau et l'image de f .

2. g est définie sur $\mathbb{C}$ par $g(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

a. montrer que $g \in \mathcal{L}(E, F)$ où on précisera les espaces vectoriels E et F et donner sa matrice dans les bases canoniques

b. g est-elle injective ? surjective ?

Théorème : Caractérisation matricielle d'un isomorphisme

Si E et F sont des $\mathbb{K}$ ev avec $\dim E = \dim F = n$, $\mathcal{B}_E$ est une base de E , $\mathcal{B}_F$ est une base de F .

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f) \text{ est inversible} \Leftrightarrow \text{Ker } A = \{0\} \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

Dans ce cas, on peut définir l'isomorphisme réciproque $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ qui est tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f^{-1}) = A^{-1}$

Formule de changement de bases :

Théorème : (Rappels PTSI) Formules de changement de bases

• Matrice de passage entre deux bases

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de E alors

la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ notée $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} =$

C'est une matrice inversible et on a : $(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} =$

• Formule de changement de bases pour les coordonnées

Si on note X et X' les coordonnées d'un vecteur x de E dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a la relation

• Formule de changement de bases pour les matrices d'une application linéaires

Si E et F sont des espaces de dimensions finies avec - $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$

- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et $Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$

- $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$

alors la matrice $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$ vérifie la relation

• Formule de changement de bases pour les matrices d'un endomorphisme

Dans le cas où $E = F$, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$, $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ la relation devient

Cohérence des relations matricielles :

Si X (resp X') les coordonnées du vecteurs x de E dans $\mathcal{B}_E$ (resp dans $\mathcal{B}'_E$)

et Y (resp Y') les coordonnées du vecteurs $f(x)$ de F dans $\mathcal{B}_F$ (resp dans $\mathcal{B}'_F$)

on a les relations matricielles :

aussi

soit

SUITE EXEMPLE N° 6 On reprend l'application linéaire f de l'exercice précédent.

1. Proposer une base $\mathcal{B}'$ de $M_2(\mathbb{R})$ et une base $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}_2[X]$ pour lesquelles la matrice de f relative à ces bases sera

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Expliciter alors les matrices inversibles P et Q permettant de lier A et A' par une relation matricielle de changement de bases.

3. Vérifier cette relation par le calcul matriciel.

EXEMPLE N° 7

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé $A = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Préciser $\text{Im}(f)$, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f + id)$

2. Proposer une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

VIII) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

VIII-1) Endomorphisme identité, matrice de passage et changement de bases

Définition : identité de E

On appelle endomorphisme identité de E notée id_E l'application de E dans E telle que : $\forall x \in E, id_E(x) = x$

Proposition : Matrice de l'identité

Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,

- si $\mathcal{B}$ est une base de E alors $Mat_{\mathcal{B}}(id_E) =$
- si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E alors $Mat_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(id_E) =$

VIII-2) Homothétie

Définition : homothétie

On appelle homothétie de E de rapport k l'application linéaire $h = k id_E$ autrement dit : $\forall x \in E, h(x) = kx$

Si E est de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B}$ alors $Mat_{\mathcal{B}}(h) =$

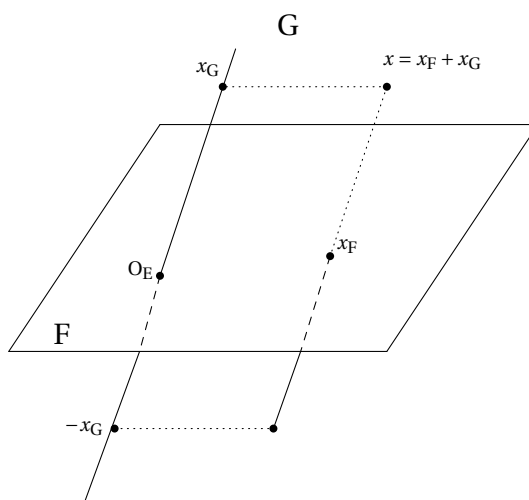
VIII-3) Projecteurs et symétries vectorielles

Soit F et G des sous-espace supplémentaires d'un espace vectoriel E autrement dit $F \oplus G = E$

Si x est un vecteur quelconque de E, il se décompose dans $E = F \oplus G$ en $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$

Le projeté de x sur F parallèlement à G est le vecteur $p(x) =$

Le symétrique de x par rapport à F parallèlement à G est $s(x) =$



Le dessin ci-dessus, en dimension 3, n'a pas vocation à représenter la réalité mais il aide à la comprendre...

Définition et proposition : Projecteur sur F parallèlement à G, Symétrie par rapport à F parallèlement à G

Si $E = F \oplus G$, on sait que : $\forall x \in E, \exists!(x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G$

- On définit le **projecteur** p_F sur F parallèlement à G par : $\forall x \in E, p_F(x) = x_F$

p_F est alors un endomorphisme de E (càd $p_F \in \mathcal{L}(E)$) avec $\text{Im } p_F =$ et $\text{Ker } p_F =$

L'ensemble des vecteurs invariants par p_F est $\text{Ker } (p_F - id) =$ Il s'agit des vecteurs tels que $p_F(x) = x$

Si p_G est le projecteur sur G parallèlement à F alors : $p_F + p_G = id_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = 0_{\mathcal{L}(E)}$

- On définit la **symétrie** s_F par rapport à F parallèlement à G par : $\forall x \in E, s_F(x) = x_F - x_G$

s_F est alors un automorphisme de E (endomorphisme bijectif) avec $s_F \circ s_F = id_E$ (autrement dit $s_F^{-1} = s_F$)

L'ensemble des vecteurs invariants est $\text{Ker } (s_F - id_E) =$ Il s'agit des vecteurs tels que $s_F(x) = x$

On a aussi $\text{Ker } (s_F + id_E) =$ Il s'agit des vecteurs tels que $s_F(x) = -x$

Si p_F est le projecteur sur F parallèlement à G alors : $s_F = 2p_F - id_E$

Théorème : Caractérisation des projecteurs

Soit $p : E \rightarrow E$ alors p est un projecteur $\Leftrightarrow p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$

Matriciellement, si $p \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans une base quelconque de E : $p \circ p = p \Leftrightarrow A^2 = A$

On a alors $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$

Théorème : Caractérisation des symétries

Soit $s : E \rightarrow E$ alors s est une symétrie $\Leftrightarrow s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = id_E$

Matriciellement, si $s \in \mathcal{L}(E)$ de matrice A dans une base quelconque de E : $s \circ s = id \Leftrightarrow A^2 = I_n$

On a $E = \text{Ker } (s - id_E) \oplus \text{Ker } (s + id_E)$ et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker } (s - id_E)$ parallèlement à $\text{Ker } (s + id_E)$

Proposition : matrice d'un projecteur dans une base adaptée

Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,

si p est un projecteur de E et si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base adaptée à la somme $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) =$$

Proposition : matrice d'une symétrie dans une base adaptée

Si E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,

si s est une symétrie de E et si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base adaptée à la somme $E = \text{Ker } (s - id_E) \oplus \text{Ker } (s + id_E)$ alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) =$$

EXEMPLE N° 8 Dans $\mathbb{R}^4$ où on note (x, y, z, t) les coordonnées dans la base canonique.

1. Identifier géométriquement l'endomorphisme q canoniquement associé à la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$

On considère le sous-espace vectoriel F donné par les équations $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + t = 0 \end{cases}$ et $G = \text{Vect}((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$

2. Prouver que F et G sont supplémentaires.

Préciser la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.

3. Donner la matrice S dans la base canonique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

4. Justifier qu'il existe une matrice inversible P qu'on précisera telle que $P^{-1}SP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = D$